(15-2)

OBSERVACIÓN SI $\bar{x}$ ES SOLUCIÓN DE $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Y SI EL CONJUNTO W-LÍMITE CORRESPONDIENTE $W(x_0) = \{p\}$ ES UN ÚNICO PUNTO,

ENTONCES p ES UN PUNTO DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA, YA QUE SI $\bar{y}(t, p)$ ES LA SOLUCIÓN QUE PASA POR p Y COMO $W(x_0)$ ES INVARIANTE, SE SIGUE QUE

$\bar{y}(t, p) \equiv p \quad \forall t \geq t_0$ $(\Rightarrow f(p) = 0)$.

TEOREMA (PRINCIPIO DE INVARIANZA DE LASALLE)

SEA $x'(t) = f(x(t))$ $f \in C^1(A)$ A ABIERTO

SEA $\bar{U} \subseteq A$ U ABIERTO Y SEA

$V: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV PARA EL SISTEMA ANTERIOR

SI ENTRE TODOS LOS CONJUNTOS COMPACTOS E INVARIANTES DE

$$Z \stackrel{def}{=} \{x \in \bar{U} : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x) = 0\}.$$

EXISTE UNO M QUE CONTIENE A TODOS LOS DEMÁS, ENTONCES M ATRAE A TODAS LAS TRAYECTORIAS (SEMITRAYECTORIAS $t \geq t_0$) ACOTADAS DE $\bar{U}$. EN PARTICULAR SI $\bar{U} = \mathbb{R}^n$.

Y $V(x) \longrightarrow \infty$ CUANDO $\|x\| \longrightarrow \infty$ M ATRAE A TODAS LAS TRAYECTORIAS (Y SE DICE QUE M ES UN ATRACTOR GLOBAL).

DEM OBSERVAR QUE SI $\bar{x}(t) \subseteq \bar{U}$ ES UNA TRAYECTORIA ACOTADA ENTONCES SU CONJUNTO W-LÍMITE ES UN COMPACTO INCLUIDO EN Z.

SEA $\bar{x}(t, x_0)$ SOLUCIÓN DEL SISTEMA CON $\bar{x}(0) = x_0$ Y TAL QUE $\bar{x}(t) \in \bar{U}$ $\forall t \in [0,\infty)$

ENTONCES COMO SABEMOS $w(x_0)$ (SU CONJUNTO w-LÍMITE) ES NO VACÍO, COMPACTO E INVARIANTE Y

$$dist(x(t), w(x_0)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

COMO $w(x_0) \subseteq Z$, POR HIPÓTESIS $w(x_0) \subseteq M$.

Y ASÍ $0 \le dis(x(t), M) \le dist(x(t), w(x_0)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

AHORA SI f Y V ESTÁN DEFINIDAS EN TODO $\mathbb{R}^n$

SEA $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Y SEA LA SOLUCIÓN $\bar{x}(t)$ CON $\bar{x}(0) = x_0$

(LO MISMO HA HACERLO EN $\bar{x}(t_0) = x_0$).

COMO $V \circ \bar{x}$ ES NO CRECIENTE

$$V \circ \bar{x}(t) \le V(x_0) \quad \forall t \ge t_0.$$

ASÍ $\bar{x}(t) \in \overline{V^{-1}[0, V(x_0))}$ $\forall t \ge t_0$

Y COMO $V(x) \to \infty$ CUANDO $\|x\| \to \infty$,

SE SIGUE QUE $\overline{V^{-1}[0, V(x_0))}$ ESTÁ ACOTADO,

ASÍ $\bar{x}(t)$ ESTÁ ACOTADA Y POR LA PRIMERA PARTE DE LA PRUEBA $\bar{x}(t)$ ES ATRAÍDA POR M.

16

EJEMPLO [VEAMOS CÓMO DETERMINAR LA ESTABILIDAD ASINTÓTICA USANDO EL PRINCIPIO DE LASALLE].

SEA LA ECUACIÓN DEL PÉNDULO CON ROZAMIENTO

$$x' = y$$

$$y' = -\operatorname{sen} x - cy$$

(NOTA $g/l \equiv 1$ Y $-cy$ FUERZA DE ROZAMIENTO PROPORCIONAL A LA DERIVADA DE x).

LA ENERGÍA

$$V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + 1 - \cos x$$

ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV PARA ESTE SISTEMA

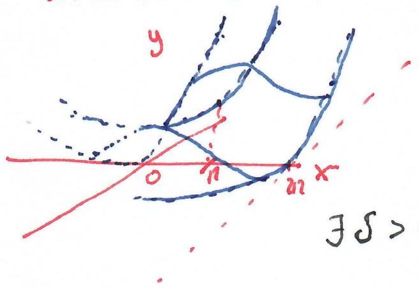
$$Z = \{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y}(-\operatorname{sen} x - cy) = -cy^2 = 0 \}.$$

LA RECTA $y=0$ ES EL LUGAR DONDE SE UBICAN LOS CONJUNTOS ω-LÍMITES DE LAS SOLUCIONES ACOTADAS.

AHORA $f(x,y) = (y, -\operatorname{sen} x - cy)$ ESTÁ DEFINIDA EN TODO $\mathbb{R}^n$.

$V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + 1 - \cos x$ ESTÁ DEFINIDO EN TODO $\mathbb{R}^n$.

(AUNQUE NO ES VERDAD QUE $V(x,y) \to \infty$ CUANDO $\|(x,y)\| \to \infty$ (TOMAR $(x,0) \to \infty$.



COMO $V(x,y)$ ES DE LIAPUNOV $(x,y)=(0,0)$ ES ESTABLE, LUEGO PARA $\varepsilon=1$

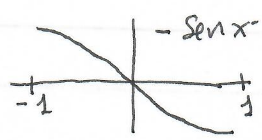
$\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall x_0 \in B_0(\delta) \Rightarrow$

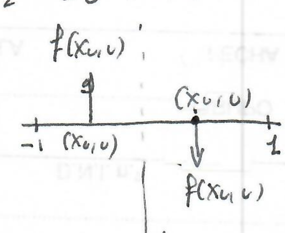
$\bar{x}(t,x_0) \in B_0(1) \quad \forall t \geq 0.$

LUEGO LAS SOLUCIONES QUE NACEN EN $B_0(\delta)$ ESTÁN ACOTADAS DENTRO DE $B_0(1)$ Y POR TANTO SU ω-LÍMITE ESTARÁ EN EL INTERVALO $[-1,1]\times\{0\}$

AHORA SI $(x_0,0) \in [-1,1]\times\{0\}$. ASÍ $x_0 \neq k\pi$.

$$f(x_0,0) = (0, -\operatorname{sen} x_0)$$





ASÍ SI $x_0 \neq k\pi$ EL CAMPO DE DIRECCIONES f EXPULSA DE $y=0$ A TODA SOLUCIÓN $\bar{x}(t,(x_0,0))$ LUEGO DICHA SOLUCIÓN SALE DE Z. ASÍ LAS ÚNICAS TRAYECTORIAS COMPLETAS

QUE CONTIENE Z SON LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

$(x_0, 0) = (k\pi, 0)$

EN CONCLUSION EL MÁXIMO CONJUNTO COMPACTO INVARIANTE M DEL TEOREMA DE LASALLE EN $[-1,1] \times \{0\}$ ES $(0,0)$. LUEGO ESTE PUNTO ATRAE A TODAS LAS TRAYECTORIAS (QUE SON ACOTADAS) QUE NACEN EN $B_0(S)$.

ASI $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(x(t), (0,0)) = 0$ LO QUE DEMUESTRA QUE $\bar{x} = (0,0)$ ES UNA SOLUCIÓN ASINTOTICAMENTE ESTABLE

APLICACIÓN DEL MÉTODO DIRECTO DE LIAPUNOV AL MÉTODO DE LA PRIMERA APROXIMACIÓN

RECORDEMOS QUE:

SEA $x'(t) = f(x(t))$ UN SISTEMA AUTÓNOMO CON $f(x_0) = 0$, PUNTO CRÍTICO

a) SI LA MATRIZ $Df(x_0)$ TIENE $\{\lambda_j = a_j + b_j i\}_{j=1}^{n}$ AUTOVALORES CON $Re\,\lambda_j = a_j < 0$ $\forall j = 1 \dots n$, ENTONCES LA SOLUCIÓN CONSTANTE $\bar{x} \equiv x_0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

b) SI LA MATRIZ $Df(x_0)$ TIENE ALGÚN AUTOVALOR $\lambda = a + bj$ CON $Re\,\lambda = a > 0$, ENTONCES LA SOLUCIÓN $\bar{x} \equiv x_0$ ES INESTABLE.

CON AYUDA DEL 2: MÉTODO DE LIAPUNOV VAMOS A PROBAR a) SUPONIENDO QUE $\lambda_j = a_j < 0$ $\forall j = 1, 2 \dots n$. (TODOS LOS AUTOVALORES SON REALES Y NEGATIVOS. Y LA MATRIZ DE JORDAN ES DIAGONAL

DEM. SEA $x'(t) = f(x(t))$ CON $f \in C^1(A)$, SOBRE CIERTO ABIERTO $A \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + Res(f, x_0, x)$$

$f(x_0) = 0$ PUNTO CRÍTICO

CON

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to x_0} \frac{Res(f, x_0, x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

CON EL CAMBIO $y = x - x_0$

$$y'(t) = f(x(t) - x_0) = F(y(t)) \quad \text{CON} \quad F(0) = 0$$

Y LA LINEALIZACIÓN,

$$y'(t) = Df(x_0)\, y + Res\, R(y).$$

$$\text{CON} \quad \lim_{y \to 0} \frac{Res\, R(y)}{\|y\|} = 0$$

COMO $|Df(x_0)| \neq 0$ (TODOS LOS AUTOVALORES SON NO NULOS).

EXISTE UN CAMBIO LINEAL DE COORDENADAS

CON ESTE CAMBIO $y=0 \iff z=0$ Y LA ESTABILIDAD DE $y=0$ EQUIVALE A LA DE $z=0$

(*) SI $\|y\| \leq \|P\| \|z\| \leq \|P\| \varepsilon$
$\|z\| \leq \|P^{-1} y\| \leq \|P^{-1}\| \varepsilon$

$\downarrow$ ANÁLISIS FUNCIONAL

$y = Pz$ $\quad$ P MATRIZ $n \times n$

TAL QUE $P^{-1} Df(x_0) P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$

ASÍ $y' = Pz' = Df(x_0) P \cdot z + R(P(z))$

OBTENGO $z'(t) = P^{-1} Df(x_0) z + P^{-1} R(P(z)) =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} z + Q(z)$$

CON $\lim_{z \to 0} \frac{Q(z)}{\|z\|} = 0$.

$$\lim_{z\to 0} \frac{P^{-1} R(P(z))}{\|z\|} = \lim_{z \to 0} \frac{P^{-1} R(P(z))}{\|P^{-1} \circ P(z)\|} \leq$$

$P^{-1}\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ APLICACIÓN LINEAL BIYECTIVA

(*) ANÁLISIS FUNCIONAL $\leftarrow$ $\exists\, N \geq n > 0$ TAL QUE $n\|x\| \leq \|P^{-1}(x)\| \leq N\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$\leq \lim_{z \to 0} \frac{P^{-1}(R(P(z)))}{n \|P(z)\|} \underset{P^{-1}\text{ LINEAL}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{P^{-1}}{n}\left(\frac{R(P(z))}{\|P(z)\|}\right) \underset{P^{-1}\text{ CONTINUA}}{=}$$

$$= \frac{P^{-1}}{n}\left(\lim_{z\to 0} \frac{R(P(z))}{\|P(z)\|}\right) \underset{\substack{z\to 0 \\ P(z) \to 0}}{=} \frac{P^{-1}}{n}(0) = 0.$$

P CONTINUA $\quad \lim_{y \to 0} \frac{R(y)}{\|y\|} = 0$

(*) $P^{-1}\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ LINEAL Y CONTINUA
$P^{-1}|_{\overline{B_0(1)}}$ ACOTADO $\exists N > 0$ TAL QUE $\|P^{-1} x\| \leq N \quad \forall \|x\| \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|P^{-1}(x)\| \leq N \|x\|$

(**) COMO $P\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ LINEAL Y CONTINUA $\exists n > 0$ CON $\|P(y)\| \leq n \|y\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$. ASÍ
$\|y\| = \|P \circ P^{-1}(y)\| \leq n \|P^{-1}(y)\| \Rightarrow \frac{1}{n}\|y\| \leq \|P^{-1}(y)\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$.

LUEGO LA ESTABILIDAD DE $X\equiv 0$, ES EQUIVALENTE A LA DE $Y\equiv 0$, EQUIVALENTE A LA DE $Z\equiv 0$ PARA EL SISTEMA

$$z'(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ & & \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} z + Q(z).$$

$$\text{CON}\quad \lim_{z\to 0}\frac{Q(z)}{\|z\|}=0.$$

PARA ESTE SISTEMA SEA LA FUNCIÓN DE LIAPUNOV:

1º) $V(z)=\sum_{i=1}^n z_i^2 \geq 0$ CON UN MÍNIMO ABSOLUTO EN $z\equiv 0$

2º) $$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial z_i} f_i = \sum_{i=1}^n 2z_i\left[\lambda_i z_i + Q_i(z)\right] =$$

$$= 2\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 + 2\sum_{i=1}^n z_i Q_i(z) \underset{N=\max|\lambda_i|<0}{\leq}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 + N\sum_{i=1}^n z_i^2 + 2\sum_{i=1}^n z_i Q_i(z) \underset{\sum_{i=1}^n z_i^2=\|z\|^2}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 + N\sum_{i=1}^n z_i^2 + 2N\|z\|^2\sum_{i=1}^n \frac{z_i Q_i(z)}{N\|z\|^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 + N\|z\|^2\left[1+\frac{2}{N}\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\|z\|}\cdot\frac{Q_i(z)}{\|z\|}\right] \underset{N<0}{\leq}$$

AHORA $\left|\frac{z_i}{\|z\|}\right| < 1$ $\forall i=1\ldots n$ y $\forall z\neq 0$.

ADEMÁS $\lim_{z\to 0}\frac{Q_i(z)}{\|z\|}=0$ YA QUE $\lim_{z\to 0}\frac{Q(z)}{\|z\|}=0$

ASÍ $\lim_{z\to 0}\frac{2}{N}\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\|z\|}\frac{Q_i(z)}{\|z\|^2}=0$, ASÍ $\exists\varepsilon>0$ TAL QUE $\forall z\in B_0(\varepsilon)$ $\left[1+\frac{2}{N}\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\|z\|}\cdot\frac{Q_i(z)}{\|z\|^2}\right]>0$

$$\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 \quad \forall z\in B_0(\varepsilon).$$

ASÍ PARA $0 < \delta < \varepsilon$, SI $\varepsilon > \|z\| > \delta$

SE SIGUE QUE

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 \leq N \|z\|^2 \leq N \delta^2 < 0$$

LO QUE PERMITE APLICAR EL TEOREMA DE LIAPUNOV SOBRE ESTABILIDAD ASINTÓTICA Y ASÍ $z \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ASINTÓTICAMENTE ESTABLE.