B ①

SISTEMAS NO LINEALES DE E.D.O

SEA UN SISTEMA

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t) \ldots x_n(t))$$
$$\vdots$$
$$x_n'(t) = f_n(t, x_1(t) \ldots x_n(t))$$

O $x'(t) = f(t, x(t))$. CON $f\ A \times D \to \mathbb{R}^n$ CON $A \subseteq \mathbb{R}$ Y $D \subseteq \mathbb{R}^n$

CON $x\ A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

PROBLEMA DE CAUCHY.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t_0 \in A \text{ y } x_0 \in D.$$

. EN GENERAL ESTE PROBLEMA NO TIENE SOLUCIÓN EXPLÍCITA, SIN EMBARGO CON HIPÓTESIS MUY GENERALES SOBRE f (SER CONTINUA), SE VE QUE TIENE SOLUCIÓN (TEOREMA DE PEANO).

CASOS SIMPLES

SISTEMAS AUTÓNOMOS.
(NO DEPENDE EL SISTEMA DE t!)

$$(1) \begin{cases} x'(t) = f(x(t)). \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

SISTEMAS LINEALES

$x'(t) = Ax(t)$.

DONDE A MATRIZ NUMÉRICA $n \times n$.

LA IDEA COMO EN EL CASO DE ECUACIONES ES TRATAR DE LINEALIZAR EL PROBLEMA (COMO EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA O IMPLÍCITA)

Y AL MENOS OBTENER RESULTADOS CUALITATIVOS SOBRE LAS SOLUCIONES DE (1).

TRAYECTORIAS

DEF SEA $x'(t) = f(x(t))$. (1)

- SEA $x(t)$ SOLUCIÓN SE LLAMA TRAYECTORIA U ÓRBITA A $\{x(t) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathrm{Dom}\, x\}$.

- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ES UN PUNTO DE EQUILIBRIO SI $f(x_0) = 0$
  $\Longleftrightarrow$ $x(t) \equiv x_0$ ES SOLUCIÓN DE (1)

- DIAGRAMA DE FASES SE LLAMA AL CONJUNTO DE LAS TRAYECTORIAS
  $\left\{ \begin{array}{l} \text{CASO BIEN CONOCIDO ES EL PLANO DE} \\ \text{FASES DE } x' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$

PROP DOS TRAYECTORIAS NUNCA SE CORTAN

(~~DEM~~) YA QUE SE SUPONE UNICIDAD DE SOLUCIONES Y EL SISTEMA ES AUTÓNOMO

PROPOSICIÓN SEAN $x(t)$, $y(t)$ DOS SOLUCIONES DE $x' = f(x)$ (DONDE SE SUPONE UNICIDAD) TALES QUE $x(t_1) = y(t_2)$ CON $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. ENTONCES $y(t) = x(t + t_1 - t_2)$. ASÍ CADA TRAYECTORIAS O COINCIDEN O NO TIENEN PUNTOS EN COMÚN.

PROP SI PARA $x(t)$ SOLUCIÓN DE $x' = f(x)$ $\exists\, t_1, t_2$ CON $t_1 \neq t_2$ CON $x(t_1) = x(t_2)$. ENTONCES

a) O BIEN $x(t) \equiv x_0$ (x_0 PUNTO DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA)

b) O BIEN $\exists\, T > 0$ TAL QUE $x(t + T) = x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. ES DECIR $x(t)$ ES UNA FUNCIÓN PERIÓDICA Y SU TRAYECTORIA UNA CURVA CERRADA SIMPLE.

POR TANTO LAS TRAYECTORIAS DE $x' = f(x)$.

- SON CURVAS ABIERTAS SIMPLES. (¿HACIA DONDE VAN? ESTABILIDAD)
- CURVAS CERRADAS SIMPLES (SOLUCIONES PERIODICAS)
- PUNTOS. (PUNTOS DE EQUILIBRIO)

PROPOSICION SUPONGAMOS QUE $\lim_{t \to w} x(t) = \eta$ CON x SOLUCION DE $f(x) = x'$ Y w EXTREMO DEL DOMINIO.

ENTONCES $w = \infty$ Y η ES UN PUNTO DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA.

(OBSERVAR QUE SI x ~~ES~~ ES PERIODICA NO EXISTE $\lim_{t \to w} x(t)$).

ESTABILIDAD DE PUNTOS DE EQUILIBRIO

DEFINICIÓN Sea x_0 punto de equilibrio de $x' = f(x)$.

a) Se dice que x_0 es <u>estable</u> si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con $\delta \le \varepsilon$, tal que $\forall x_1 \in B_{x_0}(\delta)$ la solución $\varphi(t, x_1)$ está definida y verifica

$$\|\varphi(t, x_1) - x_0\| \le \varepsilon \quad \forall t \ge 0$$

(no es redundante ~~vere~~).

b) Se dice que x_0 es asintóticamente estable si es estable y tal que

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, x_1) = x_0.$$

c) Se dice que x_0 es <u>inestable</u> si no es estable; es decir $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ $\exists \varphi(t, x_1)$ solución con $\|x_0 - x_1\| < \delta$ y que <u>no</u> cumple

$$\|\varphi(t, x_1) - x_0\| < \quad \forall t \in [0, w(x_1)).$$

— · —

LINEALIZACIÓN

Sea $x'(t) = f(x)$. Si $f \in C^1(\Omega)$, entonces

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + Res(f, x_0, x).$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to x_0} \frac{Res(f, x_0, x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Si x_0 es un punto de equilibrio de f, $f(x_0) = 0$

¿Qué relación hay entre $x' = f(x)$ y $x' = Df(x_0)x$ si $x \simeq x_0$?

DEFINICIÓN Sea x_0 punto de equilibrio de

$$x' = f(x).$$

El sistema autónomo

$$x' = Df(x_0)x$$

{En este sistema si $|Df(x_0)| \neq 0$ $x=0$ único punto de equilibrio}.

se llama linealización, aproximación lineal o primera aproximación de $x' = f(x)$.

{Primer método de Liapunov}.

¿Qué relación hay entre la estabilidad en x_0 en $x' = f(x)$ y 0 en $x' = Df(\cdot)x$.?

No siempre se dan correspondencias; hay algunos casos generales parciales.

TEOREMA Si x_0 es un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, y todos los autovalores de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real negativa, x_0 es asintóticamente estable

Método de la primera aproximación o 1: método de Liapunov

TEOREMA Si x_0 es un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, y la matriz $Df(x_0)$ tiene un autovalor con parte real positiva, x_0 es inestable

De forma más general se puede probar el teorema de HARTMAN-GROBMAN:

Si $Re\lambda \neq 0$ $\forall \lambda$ autovalor de $Df(x_0)$, en este caso se dice que el punto de equilibrio x_0 es hiperbólico, entonces existe un homeomorfismo $h : B_{x_0}(r) \longrightarrow U_0(s)$. que transforma las soluciones $x' = f(x)$ en las de su aproximación lineal $y' = Df(x_0)y$. La continuidad de h y h^{-1} conserva el carácter asintótico e induce una deformación continua entre las trayectorias de $x' = f(x)$ y las de la aproximación lineal