PUNTOS DE EQUILIBRIO EN SISTEMAS PLANOS.

REPASO Sea un sistema lineal plano

$$x' = Ax$$

AUTOVALORES	TIPO PUNTO CRÍTICO	ESTABILIDAD
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	NODO PROPIO	INESTABLE
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	NODO PROPIO	ASINTÓTICAMENTE ESTABLE
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	PUNTO DE SILLA	INESTABLE
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	NODO PROPIO O IMPROPIO (PUNTO ESTRELLADO)	INESTABLE
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	" "	ASINTÓTICAMENTE ESTABLE
$\lambda = a \pm bi$	PUNTO ESPIRAL (FOCO ESPIRAL)	
$a > 0$		INESTABLE
$b < 0$		ASINTÓTICAMENTE ESTABLE
$\lambda = \pm bi$	CENTRO	ESTABLE

El teorema de Hartman-Grobman nos informa de que en un sistema autónomo plano

$$x' = f(x).$$

Los puntos de equilibrio x_0 se comportan desde un punto de vista topológico como el cero de

$$x' = Df(x_0)\,x$$

salvo para el caso de centros, donde puede ocurrir cualquier cosa.

La simplicidad del caso $n=2$, permite obtener información sobre la estabilidad de $x' = f(x)$ en los puntos de equilibrio.

PUNTOS DE EQUILIBRIO ELEMENTALES

SEA x_0 PUNTO DE EQUILIBRIO DE $x' = f(x)$ CON $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ CON $f \in C^2(\Omega)$.

CON $|Df(x_0)| \neq 0$ ($\Leftrightarrow \lambda = 0$ NO ES AUTOVALOR DE $Df(x_0)$).

OBSERVACIÓN: EN ESTE CASO POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA $\exists\, U_{x_0}(r)$ TAL QUE $f(x) \neq 0$ $\forall x \in U_{x_0}(r)$. LUEGO x_0 ES UN CERO AISLADO DE f.

$$x' = Df(x_0)(x - x_0) + R(x).$$

$$y = x - x_0.$$

$$y' = Df(x_0)\, y + \bar{R}(y).$$

ESCRIBIMOS.

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + R_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + R_2(x_1, x_2).$$

CON $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det A \neq 0$

Y $$\lim_{(x_1, x_2) \to (0,0)} \frac{R_i(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0$$

VEAMOS SI LA CONFIGURACIÓN DEL SISTEMA LINEAL SE CONSERVA PARA EL CASO NO LINEAL.

OBSERVACIÓN

SEA $Df(x_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = A$ CON $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \neq 0$

EL ESTUDIO PARTICULAR DEL SISTEMA $X'(t) = AX + R(X)$ PARA LOS DISTINTOS CASOS DE AUTOVALORES DE LA MATRIZ A, NOS PERMITIRÁ CONOCER LOCALMENTE EL COMPORTAMIENTO DE LAS SOLUCIONES DE $X'(t) = AX + R(X)$ CERCA DE $X = 0$ INCLUIDA LA ESTABILIDAD.

- CONCLUSIONES GLOBALES NO SE PUEDEN SACAR (VER EJEMPLO SIGUIENTE.)

- SI $\lambda_1 \lambda_2$ SON LOS AUTOVALORES DE A

  a) SI λ_1, λ_2 SON COMPLEJOS CONJUGADOS

  (a_1) SI $Re\,\lambda_1 \neq 0$ $X = 0$ SERÁ UN SUMIDERO ($Re\,\lambda_1 < 0$) O FUENTE ($Re\,\lambda_1 > 0$) EN ESPIRAL

  (a_2) SI $Re\,\lambda_1 = 0$ EL SISTEMA $X' = AX + R(X)$ PUEDE VARIAR MUCHO. PROBLEMA DE LOS CICLOS-LÍMITES (T. POINCARÉ-BENDIXON)

  b) SI λ_1, λ_2 SON REALES NO NULOS, EL "EFECTO ESPIRAL" DESAPARECE Y PODEMOS ABORDAR, INCLUSO, A VER CON QUÉ ÁNGULO SE ACERCAN LAS SOLUCIONES A $X = 0$

EJEMPLO VEAMOS QUE LAS PERTURBACIONES NO LINEALES PUEDEN CAMBIAR, SIGNIFICATIVAMENTE, EL DIAGRAMA DE FASES DE UN SISTEMA

$$(1)\begin{cases} x' = x + y + x(x^2+y^2) \\ y' = -x + y + y(x^2+y^2) \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = x + y - x(x^2+y^2) \\ y' = -x + y - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

AMBOS TIENEN EL ORIGEN COMO ÚNICO PUNTO DE EQUILIBRIO (x,y) SI $x^2+y^2 = r \geq 0$; LO MISMO PARA (2).

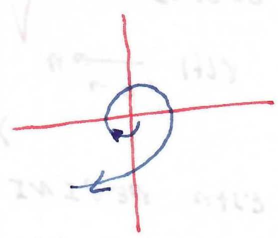
$$(1)\begin{cases} 0 = (1+r)x + y \\ 0 = (r-1)x + y \end{cases} \quad \text{SOLUCIÓN } x=y=0$$

AMBOS TIENEN LA MISMA APROXIMACIÓN LINEAL.

$$(*)\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 \iff 1-\lambda = \pm i \text{ Y ASÍ } \lambda = 1 \pm i$$

ASÍ $(x,y)=0$ EN $(*)$ ES UN FOCO INESTABLE Ó PUNTO ESPIRAL



LOCALMENTE ESTE COMPORTAMIENTO ES EL MISMO EN (1) Y (2) (SEGÚN EL RESULTADO DE HARTMAN-GROBMAN). Y SEGÚN HEMOS VISTO ANTES. PERO LA REALIDAD DEL PLANO DE FASE DE $(*)$ NO SE TRANSMITE A (1) Y (2).

PASANDO A POLARES.

$$r' = 1 \cdot r + \beta(r,\theta) \qquad \text{CON } \beta(r,\theta) = r\cos\theta\, r^2\cos\theta + r\,\text{sen}\theta\, r^2\,\text{sen}\theta = r^3$$

$$\theta' = -1 + \frac{1}{r} w(r,\theta) \qquad \text{CON } w(r,\theta) = -r\cos\theta\, r^2\,\text{sen}\theta + r\,\text{sen}\theta\, r^2\cos\theta = 0$$

$$(1)\begin{cases} r' = r(1+r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases} \quad \text{Y} \quad (2)\begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

(2) SE CALCULA IGUAL QUE (1).

COMO LAS ECUACIONES ESTÁN DESACOPLADAS.

EN (1) Y (2) $\theta(t) = -t + \theta_0$

EL RADIO ROTA, CON VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE, EN EL SENTIDO DE LAS AGUJAS DE RELOJ

(1) $r(t) = \frac{1}{\sqrt{ke^{-2t}-1}}$ $\quad k = 1 + \frac{1}{r_0^2} > 1$

$$\int 1\,dt = \int \frac{r'}{r(1+r^2)}\,dt = \int \frac{r'}{r} - \frac{2rr'}{2(1+r^2)} = \lg r(t) - \frac{1}{2}\lg(1+r^2(t)) + k = \lg \frac{r(t)}{\sqrt{1+r^2(t)}} + k$$

ASÍ $t = \lg \frac{r(t)}{\sqrt{1+r^2(t)}} + k \iff e^{t-k} = \frac{r(t)}{\sqrt{1+r^2(t)}} \iff$

$$e^{2t}k(1+r^2(t)) = r^2(t)$$

$$\iff e^{2t}k = (1-e^{2t}k)\, r^2(t)$$

$$\iff r(t) = \sqrt{\frac{e^{2t}k}{1-e^{2t}k}} = \sqrt{\frac{1}{e^{-2t}k-1}}$$

(2) $r(t) = \frac{1}{\sqrt{ke^{-2t}+1}}$, $\quad k = \frac{1}{r_0^2} - 1 > -1.$

DE LA MISMA MANERA

ASÍ LA SOLUCIÓN DE (1)

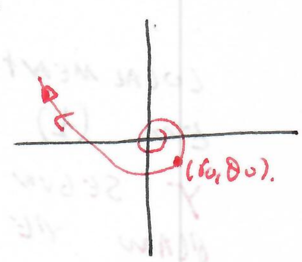
$r(t)$, PARA $r(0) = r_0 = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$. $\quad (\iff k = 1 + \frac{1}{r_0^2})$.

Y $\theta(0) = \theta_0$

ESTÁ DEFINIDA $\forall t \in (-\infty, \frac{1}{2}\lg k)$.

Y SI $t \to -\infty$ $\quad r(t) \to 0$

Y SI $t \to \frac{1}{2}\lg k$ $\quad r(t) \to \infty$



EN CAMBIO LAS SOLUCIONES DE (2)

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{ke^{-2t}+1}}$$

SI $r(0) = r_0$ $\left(\Rightarrow r(0) = r_0 = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Rightarrow k = \frac{1}{r_0^2} - 1 > -1 \right)$

$\theta(0) = \theta_0$

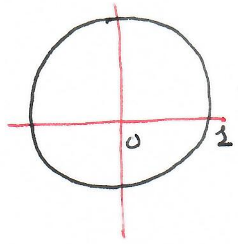
SI $r_0 < 1$ LA SOLUCIÓN ESTÁ DEFINIDA EN TODO t

SI $r_0 > 1$ ENTONCES $t \in (1/2 \lg|k|, \infty)$.

AHORA COMO (2) $\begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases}$

SI $r \equiv 1$, ES DECIR LA SOLUCIÓN $x(t) = \cos(\theta_0 - t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(\theta_0 - t)$

ES UNA SOLUCIÓN CERRADA, PERIÓDICA

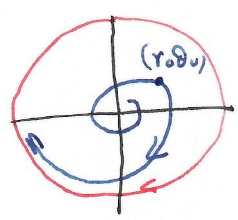


$\boxed{\text{SI } r_0 < 1}$ $k > 0$

$$\sqrt{\frac{1}{ke^{-2t}+1}} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{SI } t \to \infty \\ 0 & \text{SI } t \to -\infty \end{cases}$$

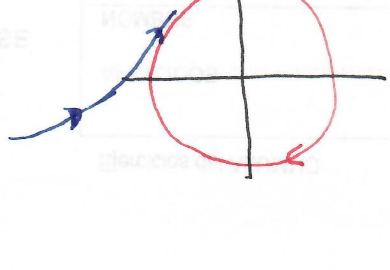
DEFINIDAS

θ GIRA



SI $r_0 > 1$ $0 > k > -1$

$$\sqrt{\frac{1}{ke^{-2t}+1}} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{SI } t \to 1/2 \lg|k| \\ 1 & \text{SI } t \to \infty \end{cases}$$



LOS DIAGRAMAS DE FASES DE (1) Y (2) LOCALMENTE EN CERO SON PARECIDOS <u>NO</u> GLOBALMENTE.

LA SOLUCIÓN $r \equiv 1$ ES MUY ESPECIAL CICLO-LÍMITE, SE DESCUBREN PARA <u>$n=2$</u> CON EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON