PUNTOS DE EQUILIBRIOS ELEMENTALES.
DIRECCIONES DE APROXIMACIÓN.

SEA EL SISTEMA AUTÓNOMO PLANO

(1) $(x,y)' = f(x,y)$. CON $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(D)$

y $f(0)=0$

SI $|Df(0)| \neq 0$

LA APROXIMACIÓN LINEAL (2) $\binom{x}{y}' = Df(0)\binom{x}{y}$

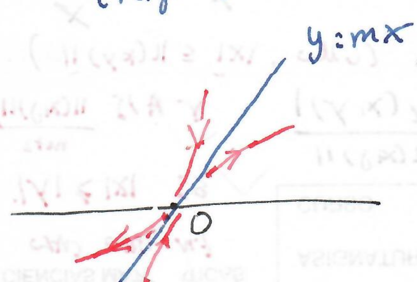
$$\binom{x}{y}' = Df(0)\binom{x}{y} + R(x,y). \quad \text{CON} \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

SI LOS AUTOVALORES DE $Df(0)$ SON NÚMERO REALES, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, PODEMOS PRECISAR, NO SÓLO LA ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN $(x,y) \equiv 0$ EN (1) SE PUEDE DEDUCIR DE LA DE (2) (LOCALMENTE COMO PUSE DE MANIFIESTO EL EJEMPLO ANTERIOR), SINO TAMBIÉN "LA DIRECCIÓN" CON LA QUE ENTRAN Ó SALEN LAS TRAYECTORIAS EN U DE 0.

DEFINICIÓN SEA $\gamma = (x(t), y(t))$ UNA TRAYECTORIA DE (1) QUE TIENDE AL PUNTO DE EQUILIBRIO $(0,0)$ CUANDO $t\to\infty$ (resp $t\to-\infty$) SE DICE QUE γ ENTRA EN $(0,0)$ (resp SALE DE $(0,0)$). CON PENDIENTE m SI

$$m = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$$

(resp $t\to-\infty$). $m \in \mathbb{R}$ ó $m = \pm\infty$.



OBSERVACIÓN LA TRAYECTORIA $\gamma=(x,y)$. TIENE UNA PENDIENTE DE RECTA TANGENTE $\frac{y'}{x'}$

SI $\exists \lim_{t\to\infty} y'/x'$, ENTONCES POR LA REGLA DE HÔPITAL $\lim_{t\to\infty} y/x$.

(SIEMPRE QUE $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} \simeq \frac{0}{0}$)

PROPOSICIÓN Si $\gamma = (x(t), y(t))$ es una solución de (1) que tiende a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$, entonces la condición necesaria y suficiente para que γ entre en $(0,0)$ con pendiente m es que

$$m = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$$

Donde m puede ser $\pm\infty$. Los posibles valores de m satisfacen la ecuación (de 2º grado)

$$\frac{a_{21} + a_{22} m}{a_{11} + a_{12} m} = m \quad (*) \qquad \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = Df(0) \right]$$

Donde $a_{12} = 0$, si $m = \infty$ es la solución de $(*)$

DEM

$\Leftarrow$) Como $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ y $\exists \lim_{t\to\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)}$

la regla de L'Hôpital dice que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

$(\sim \frac{0}{0})$

$\Rightarrow$) Ahora si $\exists \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$

$\boxed{\text{Si } m \in \mathbb{R}}$, $\exists t_0 : t > t_0 \quad x(t) \neq 0$ y por tanto mantiene el signo constante

Así
$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a_{21} x + a_{22} y + R_2(x,y)}{a_{11} x + a_{12} y + R_1(x,y)} = \frac{a_{21} + a_{22}\frac{y}{x} + \frac{R_2(x,y)}{x}}{a_{11} + a_{12}\frac{y}{x} + \frac{R_1(x,y)}{x}}$$

para t suficientemente grandes $\left(\|(x,y)\|_2 \leq (m+2) \sup(|x|,|y|) \right)$

$$\frac{|R_2(x,y)|}{|x|} \leq (m+2) \frac{|R_2(x,y)|}{\|(x,y)\|}$$

y así $\frac{\|(x,y)\|_2}{m+2} \leq \sup(|x|,|y|)$.

Si $|x| \geq |y|$.

En otro caso $|y| \leq |x|$

$\rightarrow$ Si intercambian los papeles de x e y

ASÍ $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a_{21} + a_{22}\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{R_2(x_1,x_2)}{x_1}}{a_{11} + a_{12}\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{R_1(x_1,x_2)}{x_1}} =$

$$= \frac{a_{21} + a_{22}m}{a_{11} + a_{12}m}.$$

(OBSERVEMOS QUE $a_{21} + a_{22}m$ Y $a_{11} + a_{12}m$ NO SE PUEDEN ANULAR A LA VEZ, YA QUE $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$).

(AHORA POR LA REGLA DE L'HÔPITAL
$$m = \frac{a_{21} + a_{22}m}{a_{11} + a_{12}m}).$$

$\boxed{\text{SI } m = \pm\infty}$ $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x(t)}{y(t)} = 0$

Y PROCEDIENDO COMO ANTES CAMBIANDO LOS PAPELES DE x E y ASÍ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

AHORA POR LA REGLA DE L'HÔPITAL

$$\frac{1}{m} = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

ES DECIR $m = \dfrac{a_{21} + a_{22}m}{a_{11} + a_{12}m}$ SI m ES FINITO

Y SI $m = \pm\infty$ $0 = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$, ASÍ $\boxed{a_{12} = 0}$

—o—

OBSERVACIÓN LA ECUACIÓN $m = \dfrac{a_{21} + a_{22}m}{a_{11} + a_{12}m}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{21} = 0$

SI $\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12}$ ES EL DISCRIMINANTE ÉSTE ES EL MISMO QUE EL DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

(HACER CUENTAS)

Y DE HECHO SI m_1 Y m_2 Y λ_1 Y λ_2 SON LAS RESPECTIVAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE 2º GRADO, SE SIGUE QUE

$$m_1 = \frac{a_{22} - \lambda_2}{a_{12}} \qquad m_2 = \frac{a_{22} - \lambda_1}{a_{12}}$$

ASÍ SI $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ CON $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

Y LAS SOLUCIONES $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ λ_1, λ_2 CON PARTE REAL NO NULA, SIGUE QUE

- SI $\Delta < 0$ (λ_1 Y λ_2 SON COMPLEJOS CONJUGADOS Y EL ORIGEN UN FOCO) LA SOLUCIONES DE $m = \dfrac{a_{21} + a_{22} m}{a_{11} + a_{12} m}$ (*) NO SON REALES Y NO EXISTE UNA DIRECCIÓN DE ENTRADA EN (0,0) PARA LAS TRAYECTORIAS DEL SISTEMA 1 (COMO VEREMOS SE APROXIMAN EN ESPIRAL)

- SI $\Delta > 0$ (UNO NODO O PUNTO DE SILLA) LA ECUACIÓN (*) TIENE DOS RAÍCES REALES Y HAY CUATRO POSIBLES DIRECCIONES DISTINTAS DE ENTRADA EN (0,0)

- SI $\Delta = 0$, (*) SOLO TIENE UNA ÚNICA RAÍZ Y POR TANTO DOS POSIBLES DIRECCIONES DE ENTRADA (NODO IMPROPIO O DEGENERADO) O BIEN $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$ Y TODO m SATISFACE (*) (PUNTO ESTRELLA)

10

OBSERVACIÓN o) SEA $x'(t) = f(x(t))$ CON $f(x_0) = 0$ Y $Df(x_0) = A$, $|A| \neq 0$.

(1) $x'(t) = Ax(t) + R(x(t))$ SISTEMA NO LINEAL.

(2) $x'(t) = Ax(t)$ SISTEMA LINEAL ASOCIADO

SEA J MATRIZ DE JORDAN DE LA MATRIZ A Y SEA P MATRIZ CON $P^{-1}AP = J$

LEMA EL CAMBIO $x = Py$. CONSERVA LA ESTABILIDAD DE $x=0$ - $y=0$; ADEMÁS $\frac{P^{-1}R(Py)}{\|y\|} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$

D/ $x' = Py'$ Y ASÍ $Py' = APy + R(Py)$

$\Leftrightarrow y' = P^{-1}APy + P^{-1}R(Py)$

$\Leftrightarrow y' = Jy + Q(y)$.

COMO $(\|P^{-1}\|)^{-1}\|y\| \leq \|x\| \leq \|P\|\,\|y\|$ $\quad \|x\| \to 0 \Leftrightarrow \|y\| \to 0$

ADEMÁS $\lim\limits_{y\to 0} \frac{Q(y)}{\|y\|} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{P^{-1}R(Py)}{\|P^{-1}Py\|} = 0$.

AHORA $\left\| \frac{P^{-1}R(Py)}{\|P^{-1}Py\|} \right\| \leq \frac{M\,\|R(Py)\|}{M^{-1}\,\|P(y)\|} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\|P(y)\| \to 0$
P CONTINUA

---

(3)
LUEGO $y'(t) = Jy(t)$ DE DA LA MISMA INFORMACIÓN SOBRE LA ESTABILIDAD DE $y\equiv 0$ QUE (1) Ó (2).

- SI LOS AUTOVALORES DE J SON $\underline{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$
EL PLANO DE FASES DE (3) Y (2) DIFIEREN EN LAS RECTAS DE APROXIMACIÓN A CERO, EN (3) SON LOS EJES COORDENADOS Y EN (2) LOS AUTOESPACIOS ASOCIADOS A CADA AUTOVALOR.

- SI EN (1) $\overset{\text{CON } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}{\text{HACEMOS}}$ $x = Py$, EN (4) $y' = Jy + Q(y)$ TAMBIÉN HALLAMOS SOLUCIONES QUE ENTRAN CON DETERMINADAS DIRECCIONES AL ORIGEN, VEREMOS ESTO MÁS ADELANTE

$\boxed{\text{- UNA VEZ EN (1) PASAR A JORDAN SIMPLIFICA EL PROCESO.}}$

CASO DE FOCO O ESPIRALES

SEA $\lambda = a \pm bi$ AUTOVALORES DE A CON $a \neq 0$

HACIENDO EL CAMBIO $x = Py$ QUE LLEVA $x' = Ax$

AL SISTEMA CANÓNICO $y' = By$

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

EL SISTEMA NO LINEAL $x' = Ax + R(x)$

SE TRANSFORMA EN

$$y' = By + Q(y), \quad Q(y) = P^{-1} R(P(y)).$$

$\left\{ \begin{array}{l} x = Py \\ x' = P y' \end{array} \right.$ Y ASÍ $y' = P^{-1} A P y + P^{-1} R(P(y))$.

VER PRUEBA EN LA ÚLTIMA DEMOSTRACIÓN DEL CAP. DE FUNCIONES DE LIAPUNOV; SE USA LEMA SI $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ES LINEAL Y BIYECTIVA $\exists M > 0$ CON $\frac{1}{M}\|x\| \leq \|P(x)\| \leq M\|x\|$.

ASÍ
$$y_1' = a y_1 + b y_2 + Q_1(y_1, y_2)$$
$$y_2' = -b y_1 + a y_2 + Q_2(y_1, y_2).$$

DE MODO QUE $\displaystyle \lim_{(y_1, y_2) \to (0,0)} \frac{Q_i(y_1, y_2)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = 0 \quad i = 1, 2.$ (*)

$Q(0) = P^{-1} R(0) = 0$

Y $\displaystyle \lim_{(y_1,y_2)} \frac{Q_i(y_1, y_2)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = 0$ SI $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to 0$, $Px = y \Rightarrow \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 0$

PASANDO A POLARES. (VER PAG 143-144-145 LIBRO).

$$r' = ar + f(r, \theta)$$
$$\theta' = -b + \frac{1}{r} w(r, \theta)$$

DONDE $f(r,\theta) = Q_1(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\cos\theta + Q_2(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta$ e

$w(r,\theta) = -Q_1(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta + Q_2(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\cos\theta$.

Y POR (*) $\displaystyle \lim_{r \to 0} \frac{f(r,\theta)}{r} = 0$ Y $\displaystyle \lim_{r \to 0} \frac{w(r,\theta)}{r} = 0$

DE MODO QUE $\exists \delta > 0$ TAL QUE SI $r < \delta$,

$$|f(r,\theta)| \le \frac{|a|}{2} r \quad y \quad |w(r,\theta)| \le \frac{b}{2} r$$

SI $a < 0$ (FOCO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE)

PARA $r < \delta$

$$r' \le ar - \frac{a}{2} r = \frac{a}{2} r \quad y \quad \theta' \le -b + \frac{b}{2} = -\frac{b}{2}$$

SEA $(r(t), \theta(t))$ UNA SOLUCIÓN CON $r(0) < \delta$

DE MODO QUE LA PRIMERA INECUACIÓN DECRECIENTE.

$r(t)$ ES ESTRICTAMENTE

$$y \quad r(t) \le r(0) e^{a/2\, t} \qquad \left[\frac{r'}{r} \le \frac{a}{2} \le 0 \qquad \int \frac{r'}{r} \le \int \frac{a}{2} \iff r \le r(0) e^{a/2\, t} \right.$$

DE DONDE $\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$

ESTO PRUEBA EL RESULTADO YA CONOCIDO DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA

POR OTRA PARTE COMO $\theta' \le -b/2$ RESULTA QUE $\forall t \ge 0$ $\theta(t)$ ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE Y

$$\theta(t) \le -\frac{b}{2} t + \theta(0). \quad \text{DE DONDE}$$

$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = -\infty$$

ASÍ PUES EL PUNTO $(r(t), \theta(t))$ DE LA TRAYECTORIA QUE COMIENZA CERCA DE CERO SE ACERCA A ESTE DANDO VUELTAS SIN FIN EN EL SENTIDO DE LAS AGUJAS DEL RELOJ. ($\theta(t)$ $\theta(t')$ $t' \ge t$).

DECRECIENTE.

11 bis

SEA $x'(t) = ax + by + R_1(x,y)$

$y'(t) = -bx + ay + R_2(x,y).$

EL CAMBIO DE VARIABLE $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$

$y(t) = r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)$

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)\,\theta'(t) \\ y'(t) = r'(t)\,\text{sen}\,\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\,\theta'(t) \end{array}\right| \text{ SISTEMA LINEAL } 2\times 2$$

$$r'(t) = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & -r(t)\,\text{sen}\,\theta(t) \\ y'(t) & r(t)\cos\theta(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta(t) & -r(t)\,\text{sen}\,\theta(t) \\ \text{sen}\,\theta(t) & r(t)\cos\theta(t) \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{r(t)}\,x'(t)\cos\theta(t) + \cancel{r(t)}\,y'(t)\,\text{sen}\,\theta(t)}{\cancel{r(t)}}$$

$$\theta'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta(t) & x'(t) \\ \text{sen}\,\theta(t) & y'(t) \end{vmatrix}}{r(t)} = \frac{\cos\theta(t)\,y'(t) - \text{sen}\,\theta(t)\,x'(t)}{r(t)}$$

ASÍ $r'(t) = \cos\theta(t)\left[a r(t)\cos\theta(t) + b\,\cancel{r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)}\right] + \cos\theta(t)\,R_1(x,y)$

$+ \text{sen}\,\theta(t)\left\{-\cancel{b\,r(t)\cos\theta(t)} + a\,r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)\right] + \text{sen}\,\theta(t)\,R_2(x,y). =$

$= a\,r(t) + \cos\theta(t)\,R_1(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) + \text{sen}\,\theta(t)\,R_2(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta).$

$\theta'(t) = \frac{1}{r(t)}\left[\cos\theta(t)\left[-b\,r(t)\cos\theta(t) + \cancel{a\,r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)}\right] + \cos\theta(t)\,R_2(x,y)\right.$

$-\text{sen}\,\theta(t)\left[\cancel{a\,r(t)\cos\theta(t)} + b\,r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)\right] - \text{sen}\,\theta(t)\,R_1(x,y)$

$= \frac{1}{r(t)}\left[-b\,r(t)\right] + \frac{1}{r(t)}\left[\cos\theta(t)\,R_2(x,y) - \text{sen}\,\theta(t)\,R_1(x,y)\right].$

NODOS

SEA x_0 PUNTO DE EQUILIBRIO AISLADO DE

$$x' = f(x) \quad (1)$$

CON $x_0 = 0$ $Df(0) = A$ CON $|A| \neq 0$ Y ASÍ

$$x' = f(x) \iff x' = Ax + R(x) \quad \text{CON} \lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{\|x\|} = 0$$

EL CAMBIO $y = Px$ QUE TRANSFORMA EL SISTEMA EN

$$y' = By + Q(y) \quad \lim_{y \to 0} \frac{Q(x)}{\|y\|} = 0$$

Y DONDE B ES LA MATRIZ DE JORDAN DE A,

EN EL CASO DE QUE B SEA DEL TIPO

a) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 > \lambda_2$; b1) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ b2) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

VEAMOS CÓMO SE COMPORTAN LAS SOLUCIONES DE (1) EN FUNCIÓN DE CÓMO LO HACEN LAS DE $y' = By$.

a) NODOS CON AUTOVALORES DISTINTOS.

LAS SOLUCIONES DE $y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y$ ($\lambda_1 > \lambda_2$ AMBOS DE IGUAL SIGNO)

ENTRAN (O SALEN) DE $(0,0)$ EN LA DIRECCIÓN DE LOS AUTOESPACIOS ASOCIADOS A LOS AUTOVALORES λ_1 λ_2

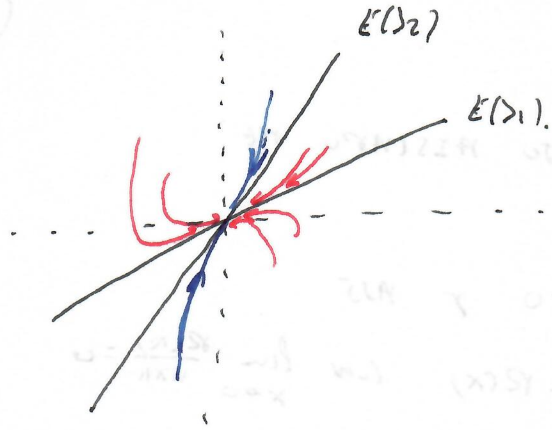
EN EL CASO NO LINEAL

TEOREMA SI $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, TODAS LAS TRAYECTORIAS DEL SISTEMA (1) QUE COMIENZAN CERCA DEL ORIGEN ENTRAN EN ÉL CUANDO $t \to \infty$ EN UNA DE LAS CUATRO DIRECCIONES DETERMINADAS POR LOS AUTOESPACIOS DE λ_1 Y λ_2. HAY UNA ÚNICA TRAYECTORIA QUE ENTRA EN EL ORIGEN EN CADA UNA DE LAS DOS DIRECCIONES DETERMINADAS POR EL AUTOESPACIO λ_2, MIENTRAS QUE HAY INFINITAS QUE LO HACEN EN CADA UNA DE LAS DOS DIRECCIONES DETERMINADAS POR EL AUTOVALOR λ_1 — EL AUTOVALOR DE MENOR VALOR ABSOLUTO. SI $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, EL RESULTADO DE ARRIBA SE INVIERTE PARA $t \to -\infty$ (AHORA EL DE MENOR VALOR ABSOLUTO ES λ_2).

CARLOS FERNÁNDEZ
J. MANUEL VEGAS
ECUACIONES DIFERENCIALES-II
Pg 384 Y SIGUIENTES.

DEMOSTRACIÓN COMPLEJA

10



DEM para ver el resultado pasamos al sistema

$$y_1' = \lambda_1 y_1 + Q_1(y_1, y_2)$$

$$y_2' = \lambda_2 y_2 + Q_2(y_1, y_2).$$

El cambio a polares:

$$y_1(t) = r(t)\cos\theta(t)$$

$$y_2(t) = r(t)\sin\theta(t)$$ da como resultado (ver 11ª las).

$$r'(t) = \left[\lambda_1 r(t)\cos^2\theta(t) + \lambda_2 r(t)\sin^2\theta(t)\right] + \cos\theta\, Q_1(y_1, y_2) + \sin\theta\, Q_2(y_1, y_2) =$$

$$= r(t)\left(\lambda_1 \cos^2\theta(t) + \lambda_2 \sin^2\theta(t)\right) + \rho(r, \theta)$$

$$\theta'(t) = \cos\theta(t)\lambda_2 \sin\theta(t) - \sin\theta(t)\lambda_1 \cos\theta(t) + \frac{1}{r(t)}\cos\theta(t)\, Q_2(y_1, y_2) - \frac{1}{r(t)}\sin\theta(t)\, Q_1(y_1, y_2)$$

$$= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\sin 2\theta(t) + \frac{1}{r} w(r, \theta)$$

Y sabemos (hoja 11ª cam de los polares) que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\rho(r,\theta)}{r} = 0 \quad y \quad \lim_{r\to 0} \frac{w(r,\theta)}{r} = 0.$$

SI $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, $\exists\, \delta_0 > 0$ TAL QUE SI $r \le \delta_0$

ENTONCES $|g(r,\theta)| \le \frac{|\lambda_1|}{2} r$

ASÍ PARA $0 < r \le \delta_2$ SE TIENE

$$r' = (\lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \operatorname{sen}^2\theta) r + g(r,\theta) \le$$

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$$(\lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \operatorname{sen}^2\theta) r + \frac{|\lambda_1|}{2} r \le \lambda_1 r + \frac{|\lambda_1|}{2} r = \frac{\lambda_1}{2} r. \quad (*)$$

DE DONDE SE SIGUE LA ESTABILIDAD ASINTÓTICA PARA $t \to \infty$ (O LA INESTABILIDAD SI $t \to -\infty$)

INTEGRANDO $\int \frac{r'}{r} \le \int \frac{\lambda_1}{2}$ $(\Rightarrow) \; 0 \le r(t) \le k e^{\frac{\lambda_1}{2} t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.)

EN PARTICULAR $(*)$ IMPLICA QUE

$r(t) = (y_1^2(t) + y_2^2(t))^{1/2}$ ES ESTRICTAMENTE

DECRECIENTE SI EN $r \le \delta_0$.

VEAMOS AHORA CON QUÉ ÁNGULO SE ACERCAN ESTAS SOLUCIONES AL ORIGEN

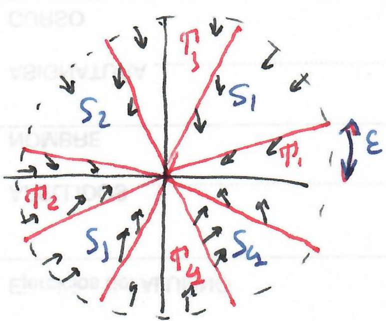
LAS POSIBLES PENDIENTES SON $m=0$ Y $m=\infty$ (SEGÚN EL ESTUDIO PREVIO DEL $\lim_{t\to\infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)}$)

LEMA TODA TRAYECTORIA QUE COMIENZA EN $\overline{B}_0(\delta_0)$ ENTRA EN EL ORIGEN CON UNA DIRECCIÓN.

DADO $\varepsilon > 0$, CON $0 < \varepsilon < \pi/4$, SE CONSIDERAN LOS SECTORES

$T_1(\varepsilon)$: $|\theta| \le \varepsilon$ $\qquad T_2(\varepsilon) : |\theta - \pi| \le \varepsilon$

$T_3(\varepsilon)$: $|\theta - \pi/2| \le \varepsilon$ $\qquad T_4(\varepsilon) : |\theta - \frac{3\pi}{2}| \le \varepsilon$.



SE DENOTAN POR $S_1(\varepsilon)$ $S_2(\varepsilon)$ $S_3(\varepsilon)$ $S_4(\varepsilon)$ LOS SECTORES QUE SE INDICAN

PARA $\delta : \delta(\varepsilon) \le \delta_0$ SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO

SE TIENE QUE

i) TODA TRAYECTORIA QUE COMIENZA EN $\Pi_1(\varepsilon)\cap\overline{B_0(\delta)}$ NO SALE DE ALLÍ (ES UNA REGIÓN INVARIANTE) Y LO MISMO PARA $\Pi_2(\varepsilon)\cap\overline{B_0(\delta)}$

ii) NINGUNA TRAYECTORIA QUE COMIENCE EN $\overline{B_0(\delta)}$ FUERA DE $\Pi_3(\varepsilon)$ PUEDE ENTRAR EN $\Pi_3(\varepsilon)$ PARA $t>0$ Y LO MISMO PARA Π_4

iii) TODA TRAYECTORIA QUE PASA POR UN PUNTO DE LAS REGIONES $S_\varepsilon(\varepsilon)\cap\overline{B_\delta(0)}$ <u>ACABA</u> ENTRANDO EN $\Pi_1(\varepsilon)$ O $\Pi_2(\varepsilon)$.

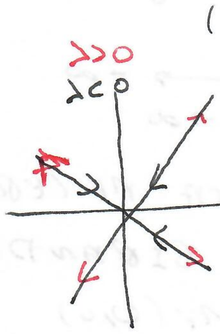
<u>VEAMOS LO ANTERIOR</u>:

b) NODOS ESTELARES

SI EL SISTEMA LINEAL ASOCIADO ES

(1) $y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y$ $\left(y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y + Q(y) \right)$

SISTEMA NO LINEAL



LAS TRAYECTORIAS DE (1) SON RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN (SALEN SI $\lambda>0$ Y ENTRAN SI $\lambda<0$).

ESTE COMPORTAMIENTO NO SE REPITE NECESARIAMENTE EN EL CASO NO LINEAL

EJEMPLO DE PERRON:

SEA $x_1' = -x_1 - \dfrac{x_2}{\lg r}$ CON $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $r<1$

$x_2' = -x_2 + \dfrac{x_1}{\lg r}$ CON $R_2(0,0) = 0$.

$$\begin{cases} R_1(x,y) = \dfrac{-y}{\lg\sqrt{x^2+y^2}} & \text{SI } \|(x,y)\|<1 \\ R_1(0,0) = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\frac{-y}{\lg\sqrt{x^2+y^2}} - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{-r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r \lg r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{-\mathrm{sen}\,\theta}{\lg r} = 0.$$

ESTO PRUEBA QUE R_1 ES DIFERENCIABLE EN $(x,y)=(0,0)$, LA DIFERENCIAL ES NULA POR TANTO CONTINUA, Y COMO (ES FACIL VER QUE LAS DERIVADAS PARCIALES SON CONTINUAS) PRUEBA QUE $\lim_{(x,y)\to 0} \dfrac{R_1(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$.

LO MISMO PARA R_2.

ESTE EJEMPLO ESTÁ EN LAS HIPÓTESIS HABITUALES CON

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ SISTEMA LINEAL ASOCIADO

EL CAMBIO A POLARES $x_1(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $x_2(t) = r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)$ CON

$$r'(t) = -r(t) + \cos\theta(t)\left(-\frac{r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)}{\lg r(t)}\right) + \mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{r(t)\cos\theta(t)}{\lg r(t)}\right)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{r(t)}\left[-0 \cdot r(t)\right] + \frac{1}{r(t)}\left[\cos\theta(t)\,\frac{r(t)\cos\theta}{\lg r} + \mathrm{sen}\,\theta(t)\,\frac{r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)}{\lg r}\right]$$

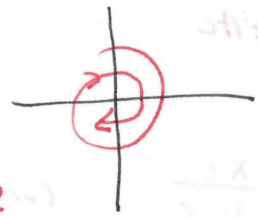
NOS DA $\begin{cases} r' = -r \\ \theta' = \dfrac{1}{\lg r}. \end{cases}$

ASÍ $r(t) = r_0 e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ Y ASÍ

$$\theta' = \frac{1}{\lg r_0 e^{-t}} = \frac{1}{\lg r_0 - t} = \frac{-1}{t - \lg r_0}$$

DE DONDE $\theta(t) = -\lg(t - \lg r_0) + k \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$

ASÍ LAS SOLUCIONES QUE NACEN CERCA DE CERO SON ATRAÍDAS POR CERO PERO GIRANDO INDEFINIDAMENTE AL REDEDOR DE $(0,0)$



OBSERVACIÓN ESTE EJEMPLO MUESTRA QUE AUNQUE LA ECUACIÓN $m = \dfrac{0 + (-1)m}{-1 + 0m} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$ TIENE SOLUCIÓN, m NO PROPORCIONA UNA PENDIENTE DE ENTRADA A CERO.

SE PIERDE POR TANTO EL COMPORTAMIENTO DE PUNTO DE ESTRELLA DEL SISTEMA LINEAL ASOCIADO

PARA TENER REGULARIDAD NECESITAMOS IMPONER MÁS CONDICIONES

TEOREMA SEA EL PROBLEMA

$$(1) \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}R_1(x,y)\\R_2(x,y)\end{pmatrix}$$

CON $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ Y $R_i(0,0) = 0$ $i=1,2$

SI $R_i \in C^2(B_0(\varepsilon))$ $i=1,2$, ENTONCES LAS TRAYECTORIAS DEL SISTEMA QUE COMIENZAN CERCA DEL ORIGEN ENTRAN EN ÉL, CUANDO $t \to \infty$ SI $\lambda < 0$ ✓ (VISTO USANDO FUNCIÓN DE LIAPUNOV), Y CUANDO $t \to -\infty$ SI $\lambda > 0$, CON UNA PENDIENTE m BIEN DEFINIDA, Y DE MODO QUE PARA CADA UNO DE LOS DOS ÁNGULOS $\theta^* \in [0, 2\pi]$ CON $\operatorname{tg}\theta^* = m$ HAY EXACTAMENTE UNA TRAYECTORIA QUE ENTRA CON ÁNGULO θ^*

c) NODOS IMPROPIOS.

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1'(t) &= \lambda x_1(t) + x_2(t) + R_1(x_1,x_2) \\ x_2'(t) &= \lambda x_2(t) + R_2(x_1,x_2) \end{aligned}$$

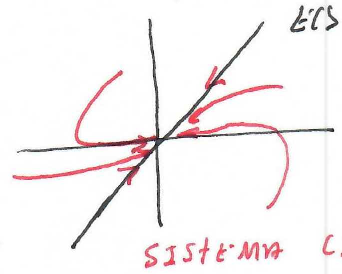
con $\lambda \in \mathbb{R}$, $R(0,0)=0$

y $\lim_{(x_1,x_2)\to 0} \frac{R(x_1,x_2)}{\|(x_1,x_2)\|} = 0$.

EL SISTEMA LINEAL ASOCIADO ES $\lambda<0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$E(\lambda)$ AUTOESPACIO

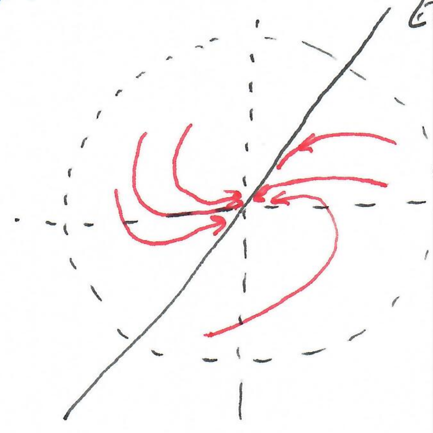


SISTEMA LINEAL

DE NUEVO COMO EN EL CASO ANTERIOR NECESITAMOS REGULARIDAD RESPECTO DE R PARA QUE EL COMPORTAMIENTO DE LA PARTE LINEAL SE TRANSMITA A LA ECUACIÓN NO LINEAL

TEOREMA: DADO EL SISTEMA (1) CON $R \in C^2(B_0(\varepsilon))$, ENTONCES LAS TRAYECTORIAS DEL SISTEMA QUE COMIENZAN CERCA DEL ORIGEN ENTRAN EN EL CUANDO $t\to\infty$ Y $\lambda<0$ EN UNA DE LAS DOS DIRECCIONES DETERMINADAS POR EL AUTOESPACIO DEL AUTOVALOR λ. INFINITAS POR CADA DIRECCIÓN

$E(\lambda)$



$\lambda<0$

PUNTOS DE SILLA

SEA $x'(t) = f(x(t))$ CON $f(x_0)=0$ Y $|Df(x_0)| \neq 0$.

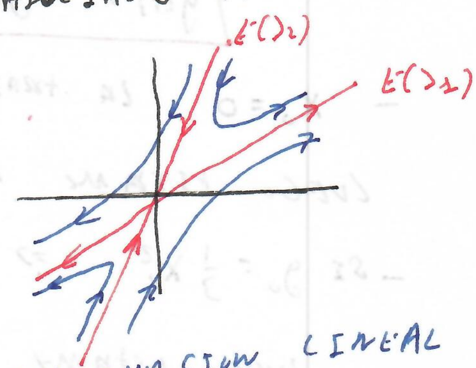
(1) ASÍ $x'(t) = Df(x_0)(x-x_0) + R(x_0)$, EN PARTICULAR SI $x_0=0$

$\exists\, P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ISOMORFISMO CON $x(t) = P\,y(t)$

$$y'(t) = \underbrace{P^{-1} Df(x_0) P}_{J \text{ MATRIZ DE JORDAN ASOCIADA A } Df(x_0)}\, y + P^{-1}R(Py) \quad \text{Y} \quad \lim_{y\to 0} \frac{Q(y)}{\|y\|} = 0.$$

SI $y'(t) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} y(t) + Q(y)$ CON $\lambda_2<0<\lambda_1$

ENTONCES EL SISTEMA LINEAL ASOCIADO TIENE EN $y=0$ UN PUNTO DE SILLA.



APROXIMACIÓN LINEAL

EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA NO LINEAL SIGUE UNAS PAUTAS PARECIDAS AL SISTEMA LINEAL Y QUE SE RECOGE EN EL SIGUIENTE TEOREMA.

TEOREMA SI $Df(x_0)$ DEL SISTEMA 1 TIENE DOS AUTOVALORES REALES $\lambda_2<0<\lambda_1$, ENTONCES $\exists\,\delta>0$ TAL QUE EN $B_{x_0}(\delta)$. LAS TRAYECTORIAS SE COMPORTAN:

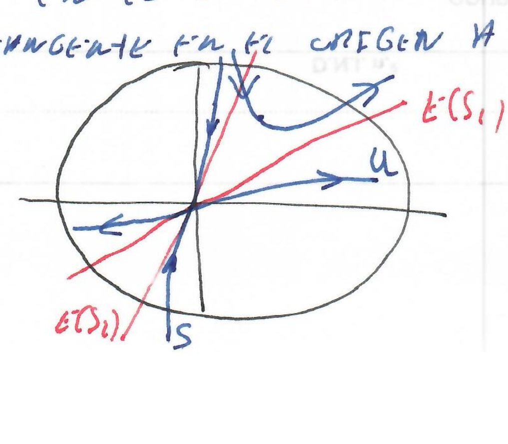
i) $\exists\, S$ CURVA QUE PASA POR x_0 TAL QUE $\forall\, \bar{x}$ SOLUCIÓN DE (1) CON $\bar{x}(0) \in S \cap B(0,\delta)$ $\bar{x}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} x_0$ Y $\bar{x}(t) \in S$ $\forall t \geq 0$

ii) $\exists\, U$ CURVA QUE PASA POR x_0 TAL QUE $\forall\, \bar{x}$ SOLUCIÓN DE (1) CON $\bar{x}(0) \in U \cap B(0,\delta)$, $\bar{x}(t) \in U$ $\forall t\geq 0$ Y $\bar{x}(t)$ SALE DE $B(0,\delta)$ CUANDO t CRECE

iii) SI $\bar{x}$ ES SOLUCIÓN CON $\bar{x}(0) \in B_0(\delta) - (S \cup U)$, $\bar{x}(t)$ SALE DE $B_0(\delta)$ CUANDO t CRECE

iv) S TIENE POR TANGENTE EN EL ORIGEN AL AUTOESPACIO $E(\lambda_2)$ Y U TIENE POR TANGENTE EN EL ORIGEN A $E(\lambda_1)$.

PLANO DE FASE LOCAL



EJEMPLO $\quad x' = -x$

$y' = y - x^2$ $\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}$

$f(x,y)=0 \iff (x,y)=0$, $Df(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

AUTOVALORES $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 1$ AUTOESPACIO. $E(\lambda_2) = \{(x,y) : y = 0\}$

$E(\lambda_1) = \{(x,y) : x = 0\}$

ESTE SISTEMA SE PUEDE RESOLVER GLOBALMENTE

$\boxed{x(t) = x_0 e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

y $y' = y - x_0 e^{-2t}$. ECUACION LINEAL NO HOMOGENEA

$\boxed{y(t) = e^t y_0 + \frac{1}{3}x_0^2(e^{-2t} - e^t) = (y_0 - \frac{1}{3}x_0^2)e^t + \frac{1}{3}x_0^2 e^{-2t}}$

- $x_0 = 0$ LA TRAYECTORIA $\bar{x}(t) = 0$ $\bar{y}(t) = e^t y_0$ ES EL EJE $y=0$

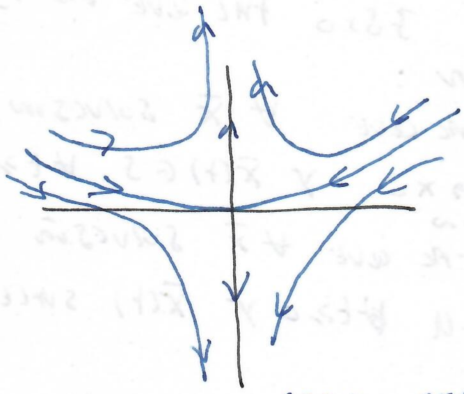
LUEGO ESTAMOS ANTE LA CURVA U.

- SI $y_0 = \frac{1}{3}x_0^2 \Rightarrow x(t) = e^{-t}x_0 \quad y(t) = \frac{1}{3}x_0^2 e^{-2t} = \frac{1}{3}(x(t))^2$

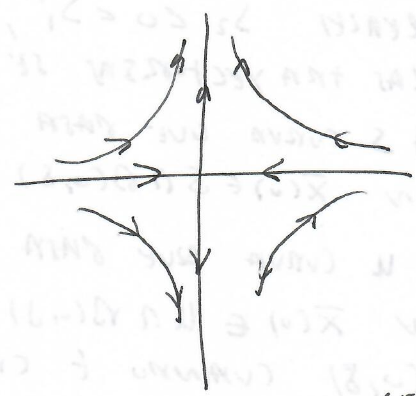
LUEGO ESTAMOS ANTE UNA PARABOLA CON TANGENTE EN $(x,y)=0$

$E(\lambda_1)$, LUEGO ESTAMOS ANTE S.

ASI EN ESTE CASO



PLANO DE FASES DEL SISTEMA



APROXIMACION LINEAL

CENTROS

SEA $x'(t) = f(x(t))$ CON $f(x_0) = 0$ Y $|Df(x_0)| \neq 0$

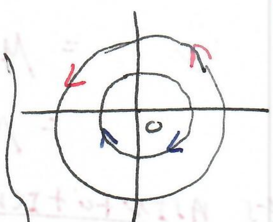
ASÍ $Df(x_0)(x-x_0) + R(x) = x'(t)$ EN PARTICULAR SI $x_0 = 0$

$\exists P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ISOMORFISMO CON $x(t) = P y(t)$

$$y'(t) = \underbrace{P^{-1} Df(x_0) P}_{J \text{ MATRIZ DE JORDAN}} y + \underbrace{P^{-1} R(Py)}_{Q(y)} \quad \text{Y} \quad \lim \frac{Q(x)}{\|y\|} = 0$$

SI $y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} y(t) + Q(t)$ CON $b \in \mathbb{R}$,

ENTONCES EL SISTEMA LINEAL ASOCIADO TIENE EN $(x,y) = 0$ UN CENTRO



EL SENTIDO DE GIRO DEPENDE DEL SIGNO DE B

PASANDO A POLARES (COMO SE VIO EN LA PRÁCTICA)

$$r' = \rho(r,\theta)$$
$$\theta' = -b + \frac{1}{r} w(r,\theta)$$

LA ECUACIÓN $\theta' = -b + \frac{1}{r} w(r,\theta)$ ES COMO LA DEL CASO ESPIRAL Y COMO $\lim_{r\to 0} \frac{\rho(r,\theta)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{w(r,\theta)}{r} = 0$, SE VE DE IGUAL MANERA QUE LAS SOLUCIONES CERCANAS A CERO GIRAN EN TORNO A CERO

SIN EMBARGO r' DEPENDE DE LA PARTE NO LINEAL, Y ESTA PARTE NO LINEAL PUEDE CAMBIAR MUCHO EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA.

EJEMPLO: LOS SIGUIENTES EJEMPLOS PONEN DE MANIFIESTO LO ANTERIOR.

1) LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA

$x' = x(a-by)$
$y' = y(-c+dx)$

TIENE UN PUNTO DE EQUILIBRIO EN $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

SE VIO

SE CONSERVA EL DIAGRAMA DE FASES DE LA LINEALIZACIÓN

ALREDEDOR DEL PUNTO HAY TRAYECTORIAS CERRADAS

DEFINICIÓN para $x' = f(x)$ con $f(x_0) = 0$ y $|Df(x_0)| \neq 0$, se dice que $\bar{x} \equiv x_0$ es un centro si en un entorno de x_0 todas las trayectorias son cerradas

EJEMPLO 2:

$$x' = y + \mu x(x^2+y^2)$$
$$y' = -x + \mu y(x^2+y^2) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

La linealización $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dice que $(x,y) \equiv 0$ es un centro

Sea la función de Liapunov $V(x,y) = x^2+y^2 \geq 0$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 2x(y+\mu x(x^2+y^2)) + 2y(-x+\mu y(x^2+y^2)) =$$
$$= \mu x^2(x^2+y^2) + \mu y^2(x^2+y^2) =$$
$$= \mu (x^2+y^2)^2$$

si $\underline{\mu < 0}$, el cero es asintóticamente estable

si $\mu > 0$, el origen es inestable

Luego un pequeño cambio en la parte no lineal, en este caso cambia por completo el diagrama de fase

③ **EJEMPLO**

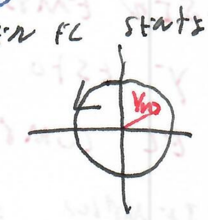
$$\begin{cases} x' = y - x(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y' = -x - y(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Pasando a polares queda

$$r' = -r^3\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{r}$$
$$\theta' = -1$$

Ecuaciones desacopladas cuyas soluciones son

$\theta(t) = -t + \theta_0$ (las órbitas giran en el sentido negativo)

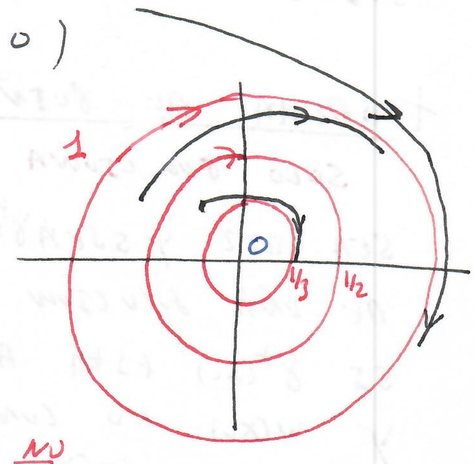


$r \equiv \frac{1}{n}$ verifican la ecuación

AHORA SI $r>1$ $(r'<0)$

$$\frac{1}{2n} < r < \frac{1}{2n-1} \quad (r'>0)$$

$$\frac{1}{2n+1} < r < \frac{1}{2n} \quad (r'<0)$$



ASÍ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ UNA ÓRBITA $(r(t),\theta(t)) = (\frac{1}{n_0}, -t+\theta_0)$ / $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, CERRADA QUE RODEA A $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$

ASÍ $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ ES ESTABLE, NO ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE, NO ES UN CENTRO, PERO ES.

DEFINICIÓN SEA $x' = f(x(t))$, $f(x_0)=0$ y $|Df(x_0)| \neq 0$. SE DICE QUE EL PUNTO DE EQUILIBRIO x_0 ES UN PUNTO DE ROTACIÓN Ó UN CENTRO-FOCO, SI PARA TODO ENTORNO DE x_0 EXISTE DENTRO DE ÉL UNA TRAYECTORIA CERRADA QUE RODEA A x_0.

OBSERVACIÓN EN EL EJEMPLO ANTERIOR LAS CURVAS CERRADAS $(\frac{1}{n}, -t+\theta_0)$ SON W-LÍMITES DE LAS TRAYECTORIAS QUE NO SON CERRADAS.

OBSERVACIÓN ASÍ LOS CENTROS SON UN CASO ESPECIAL DE PUNTO DE ROTACIÓN.

LOS TRES EJEMPLOS ANTERIORES NO SON LO QUE SE PUEDE DAR YA QUE

TEOREMA SEA $x' = f(x)$ CON $f(x_0)=0$ Y $|Df(x_0)| \neq 0$. SI LA APROXIMACIÓN LINEAL $x'(t) = Df(x_0)x$ TIENE UN CENTRO EN $x_0=0$, ENTONCES O BIEN $\bar{x}=x_0$ ES UN CENTRO, UN FOCO O UN PUNTO DE ROTACIÓN PARA EL SISTEMA $x'=f(x)$. EN ESTE ÚLTIMO CASO EXISTE UN ENTORNO DE x_0 TAL QUE TODA ÓRBITA QUE COMIENZA EN ÉL O BIEN ES UNA ÓRBITA CERRADA QUE RODEA A x_0 O BIEN ES UNA ESPIRAL QUE SE APROXIMA, PARA $t\to\infty$, A UNA ÓRBITA CERRADA QUE RODEA A $\bar{x}_0$

EN EL EJEMPLO 2, ESTE TEOREMA NOS DICE QUE LA ESTABILIDAD ASINTÓTICA ES EN ESPIRAL

OBSERVACIÓN: EL MÉTODO DE LIAPUNOV NOS PERMITE EN ALGUNOS CASOS, COMO EN EL EJEMPLO 2, DISCERNIR QUE ESTAMOS ANTE UN FOCO Y NO UN CENTRO