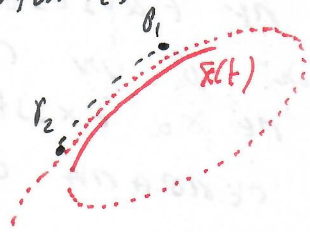
Esta última afirmación se puede deducir del contexto, pero difícil teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema de Poincaré-Bendixson

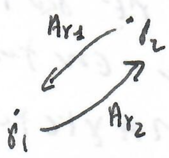
Solo funciona para sistema plano.

Sea $n=2$ y sea $\gamma^+(x_0) = \{\bar{x}(t) : t \geq t_0\}$ la semi-trayectoria de la solución $\bar{x}(t_0) = x_0$ del sistema $x'(t) = f(x(t))$.
Si $\gamma^+(x_0)$ está acotada, $\omega(x_0)$ es su ω-límite y $\omega(x_0)$ no contiene ningún punto de equilibrio entonces $\omega(x_0)$ es una órbita periódica.

Dem. • Si $\bar{x}(t)$ está acotada y no $\exists \lim_{t\to\infty} x(t)$, entonces está "obligada" a girar.



Si $p_1, p_2 \in \omega(x_0)$, parece natural que un arco Ar_1 y otro Ar_2 los una



de aquí que $\omega(x_0)$ sea una curva cerrada

• además vimos que $\omega(x_0)$ era positivamente invariante, luego, contiene trayectorias y si no existe un punto $y_0 \in \omega(x_0)$, $\bar{y} \equiv y_0$, toda la curva ha de ser trayectoria constante, ser una trayectoria (sino un trozo de ella tendría límite en el infinito y este tendría que ser un punto crítico).

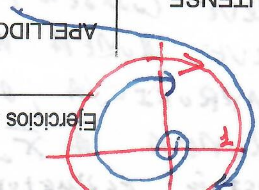
Según Vegas esta es la prueba de Poincaré
lo detalles ver Bendixson (larga y difícil).

Def Si $\omega(x_0)$ es un ω-límite que no contiene puntos de equilibrio se le llama ciclo-límite.

→ Visto anteriormente

Ejemplo $x' = x+y - x(x^2+y^2)$
$y' = -x+y - y(x^2+y^2)$

Polares $r' = r(1-r^2)$
$\theta' = -1$



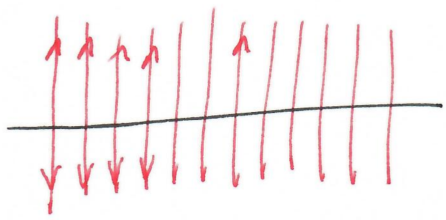
$r=1$ es un ciclo-límite y atrae a toda trayectoria salvo $(x,y)=(0,0)$.

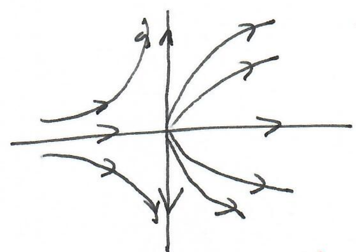
PUNTOS DE EQUILIBRIO NO ELEMENTALES

SEA $x'(t) = f(x(t))$ CON $f(x_0) = 0$ Y $|Df(x_0)| = 0$
EN ESTE CASO EL PUNTO DE EQUILIBRIO, PUEDE TENER COMPORTAMIENTOS MUY VARIADOS.

EJEMPLO $x' = x^2$
$y' = y$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

DADO QUE SE PUEDE INTEGRAR



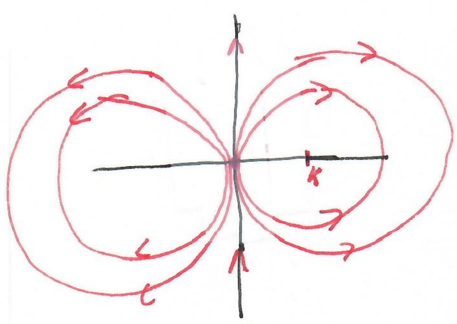


MEZCLA DE PUNTO DE SILLA Y NODO

$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ UNICO PUNTO DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA, OTRO
SISTEMA LINEAL ASOCIADO
$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Y ASI EL SISTEMA LINEAL ASOCIADO
TIENE $y = 0$, $x = x_0$ PUNTO DE EQUILIBRIO

EJEMPLO $x' = 2xy$
$y' = y^2 - x^2$
AQUI $f(0) = 0$ Y $|Df(0)| = 0$, CON LA MATRIZ $Df(0) \equiv 0$.

AHORA $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2}$ ECUACION HOMOGENEA, INTEGRANDOLA
SE OBTIENE $(x-k)^2 + y^2 = k^2$



MEZCLA DE CENTRO Y SURTIDOR.

ETC. (MAS EJEMPLOS LIBRO DE CHARLES).