

**HOJA-1 ( V.C.A.F. )**

**1.-** Sea  $a, b \in \mathbb{C}$ . Probar que:

$$| |a| - |b| | \leq |a - b| \quad \text{y} \quad | |a| - |b| | \leq |a + b|$$

**2.-** Si  $(1 + |v|^2)u = (1 + |u|^2)v$ , probar que entonces o bien  $v = u$  o bien  $uv = 1$ .

**3.-** Si  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $\Omega$  abierto, y  $|f|$  es constante en  $\Omega$ , probar que  $f$  es también constante.

**4.-** a) Encontrar los recintos del plano donde  $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ ,  $z = x + yi$ , es holomorfa.

b) Para que valores  $a, b$  y  $c$  la función  $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$  es holomorfa.

**5.-** Calcular las regiones donde son convergentes las series:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-a)^n & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{2^n} \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-a)^n} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(z-a)^n} \end{array}$$

**6.-** Sea  $\Omega = D(0, 2)$ . ¿ Existe  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $f(1/n) = -1/n^2$  y  $f(\frac{n+1}{n}) = 1/n$ ,  $n \geq 2$  ?

**7.-** Probar que:

$$\int_{[z_1, z_2]} dz = z_2 - z_1 \quad \text{y} \quad \int_{[z_1, z_2]} z dz = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)$$

**8.-** Sea  $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$  con  $R > 1$ . Calcular  $\int_{\gamma} (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz$  donde  $\gamma^* = \partial D(0, 1)$  orientada positivamente. Deducir que

$$2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t/2) f(e^{it}) dt = \pi(2f(0) + f'(0))$$

(Usar que  $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz$  ¿Por qué? ).

9.- a) Integrar la función  $e^{-z^2}$  sobre las fronteras  $\gamma_R$  de los rectángulos  $[-R,R] \times [0,b]$ ,  $R > 0$ , para probar que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad \text{y que} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2bx dx = 0.$$

b) Usar a) para deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2\tau^2} e^{itx} dx = e^{i\theta - (t\tau)^2/2}$$

(Función característica de la distribución normal de media  $\theta$  y varianza  $\tau^2$ ).

10.- Sea  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$  de modo que  $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 1$  y  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$ . Pruébese que  $f(z) = \frac{1+z}{z}$ .

11.- Sea  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  tal que  $|f'(z)| \leq |z|$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Pruébese que  $\exists a, b \in \mathbb{C}$ ,  $|b| \leq 1/2$ , tales que  $f(z) = a + bz^2$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

12.- Si  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  y existe  $D(a,r)$  con  $f(\mathbb{C}) \cap D(a,r) = \emptyset$ , probar que  $f$  es constante.

13.- Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $L$  una recta en  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  es una función continua sobre  $\Omega$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus L)$ , probar que  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ .