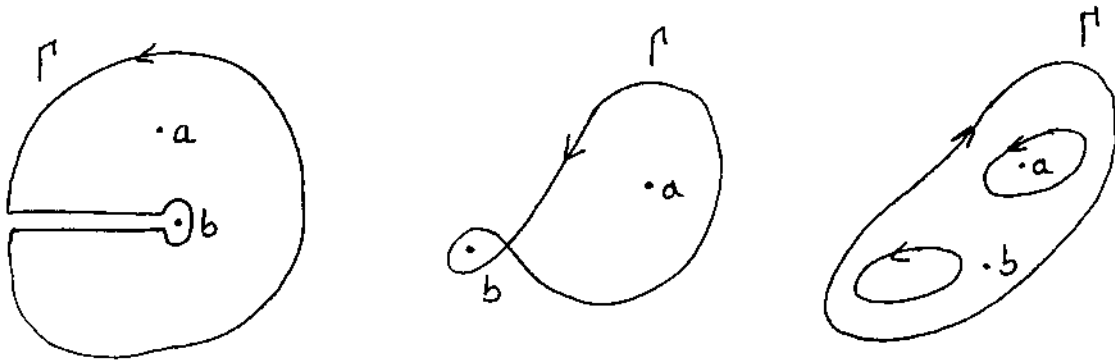


1.- Calcular los índices de  $a$  y  $b$  con respecto con respecto a  $\Gamma$  en las siguientes situaciones:



2.- Sea  $\gamma$  un camino cerrado formado por la poligonal formada por los segmentos que unen los puntos:  $-1-i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i$  (en este orden). Calcúlese los valores que toma la función índice  $\text{Ind}_\gamma$  en cada punto de  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ .

3.- Sea  $\Gamma$  un ciclo. Sean  $\text{Int}_\Gamma = \{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \text{Ind}_\Gamma(\alpha) \neq 0\}$  y  $\text{Ext}_\Gamma = \{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \text{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0\}$ . Mostrar con ejemplos que ambos conjuntos, en general, no son conexos. ¿Que ocurre si  $\gamma$  es una curva de Jordan?

4.- a) Sea  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y sea un camino  $\gamma^* \subset \Omega$ ,  $\Omega$  abierto conexo.

Sea  $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  ¿qué significado geométrico tiene la integral anterior?

b) Sean  $\gamma$  un camino cerrado en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $g(z) = z^n$ . Probar que  $\text{Ind}_{g \circ \gamma}(0) = n \text{Ind}_\gamma(0)$

5.- Si  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son dos caminos cerrados parametrizados sobre el intervalo  $[0,1]$ , y si para un  $\alpha \in \mathbb{C}$  se verifica que:

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \quad \forall s \in [0,1],$$

probar que  $\text{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \text{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$ .

(Indicación: considerar  $\gamma(s) = \frac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha}$ , comprobar que  $\gamma^* \subseteq D(1,1)$  y calcular  $\text{Ind}_\gamma(0)$  ).

6.- Sea el camino cerrado  $\gamma(t) = r_1 \cos t + r_2 \sin t$ , con  $0 < r < r_1 < r_2$ . Probar que  $\gamma$  es homótopa a la frontera de  $D(0,r)$ , orientada positivamente.

Calcular  $\text{Ind}_\gamma(0)$  y  $\text{Ind}_\gamma\left(\frac{r+r_1}{2}\right)$ .

7.- a) Probar que para todo camino  $\Gamma$  en  $\Omega$ ,  $\Omega$  simplemente conexo, se tiene que  $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \notin \Omega$ .

b) Deducir un teorema de Cauchy para conjuntos simplemente conexos.

c) Dar un ejemplo de un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplemente conexo que no sea convexo.

8.- Desarrollar en serie de LAURENT las siguientes funciones:

a)  $\frac{z+1}{z}$  en  $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < \infty\}$ ; b)  $\frac{z}{z^2+1}$  en  $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z-i| < 2\}$ ;

c)  $\frac{1}{z(z+1)}$  en  $z_0=0$ ; d)  $\frac{z}{z+1}$  en  $z_0=0$ ; e)  $\frac{e^z}{z^2}$  en  $z_0=0$ ;

f)  $[z(z-1)(z-2)]^{-1}$  en  $\{0 < |z| < 1\}$  y en  $\{1 < |z| < 2\}$ ; g)  $\text{sen} \frac{1}{z}$  en 0.