V.C.A.F. HOJA-3

1.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{p\})$, con $p \in \Omega$ y Ω abierto.
a) Probar que existe $\lim_{z\to p} f(z)$ si y solo si $|f|$ está acotada en un entorno de p.
b) Si $f(p) = \lim_{z\to p} f(z)$, probar que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

2.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{p\})$, con $p \in \Omega$ y Ω abierto. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a) f tiene un polo de orden m en p
b) 1/f tiene un cero de orden m en p
c) $g(z) = (z - p)^m f(z)$ tiene una singularidad evitable en p y $g(p) = \lim_{z\to p} g(z) \neq 0$.

3.- a) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Si Ω es conexo y $A \subseteq \Omega$ es discreto, probar que $\Omega\backslash A$ es de nuevo un abierto conexo.
b) Sea $\mathcal{M}(\Omega)$ el conjunto de funciones meroforfas sobre Ω. Probar que $\mathcal{M}(\Omega)$ es un cuerpo.
c) Establecer un Teorema de Identidad para funciones meromorfas.

4.- Si f tiene un polo de orden n en a, probar que el residuo de f en a está dado por la fórmula:

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} g^{n-1)}(z)\frac{1}{(n-1)!}$$

donde $g(z) = (z-a)^n f(z)$.

5.- Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{z_0\})$ y sea (z_n) una sucesión convergente a z_0 de modo que $f(z_n) = 0$ para todo n. Probar que f tiene una singularidad esencial en z_0 o bien f es nula.

6.- Indicar si es cierta la siguiente afirmación: "la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{e^z}{z}$ tien un polo de orden 2 en z = 0 y cuyo residuo es 1".

7.- Calcular:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{e^{2i\pi z^3} - 1}\,dz$ donde $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ y $n < r^3 < n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1 + z^4}$ donde γ es la elipse $\{x + iy : x^2 - xy + y^2 + x + y = 0\}$ orientada positivamente.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2 + 1}dx$

8.- Sea f una función meromorfa en un abierto Ω. Sea $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ de modo que $\gamma^* = \partial D(a,r)$ no contiene ni ceros ni polos de f.

a) Si $|f(z)| < 1$ $\forall z \in \gamma^*$, probar que el número de las soluciones de la ecuación $f(z) = 1$ en $D(a,r)$ es el mismo que el número de polos de f en $D(a,r)$.

b) Si $|f(z)| < 1$ $\forall z \in \gamma^*$, probar que el número de las soluciones de la ecuación $f(z) = \alpha$, $|\alpha| \geq 1$, en $D(a,r)$ es el mismo que el número de polos de f en $D(a,r)$

c) Si $|f(z)| > 1$ $\forall z \in \gamma^*$, probar que el número de las soluciones de la ecuación $f(z) = \beta$, $|\beta| \leq 1$, en $D(a,r)$ es el mismo que el número de ceros de f en $D(a,r)$.

9.- Sea $P(z) = z^8 + 6iz^2 + 8$. Probar que P tiene todas sus raíces en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

10.- Calcular el supremo de $|f(z)|$ en el conjunto A en los casos:
a) $f(z) = e^{iz}$ con $A = \{x + iy : 9x^2 + y^2 \leq 9\}$
b) $f(z) = \operatorname{sen} z$ con $A = \{x + iy : 0 \leq x, y < 2\pi\}$

11.- Sea Ω abierto, conexo y con un disco $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante y de modo que $|f|$ es constante en $\partial D(a,r)$. Probar que f tiene al menos un cero en el disco $D(a,r)$.

12.- Si $m,n \in \mathbb{N}$ y $P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$, probar que P tiene exactamente n ceros el el disco $D(0,1)$.

13.- Sea (f_n) una sucesión de funciones, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo n, sobre una abierto conexo Ω. La sucesión converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una función f. Si f tiene un cero de orden N en $z_0 \in \Omega$, probar que existen $\rho > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq n_0$ la función f_n tiene exactamente N ceros en el disco $D(z_0,\rho)$. Además, probar que dichos ceros convergen a z_0 (cuando $n \longrightarrow \infty$)