

1.- Sea  $u(x,y) = xy$ . Comprobar que  $u$  es armónica en todo  $\mathbb{C}$ . Encontrar  $v$  armónica sobre  $\mathbb{C}$  tal que  $f = u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ .

2.- Sea  $u(x,y) = x^2 + ay^2 + 2xy$ . Determinar para que valores de "a"  $u$  es armónica. Encontrar  $v$  (función armónica conjugada) tal que  $f = u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ .

3.- Se define el núcleo de Poisson por  $P(r,t-\theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t-\theta)}$ ,

$r \in [0,R)$  y  $t,\theta \in [0,2\pi]$ . Comprobar que:

a)  $P(r,t-\theta) > 0$  b) fijados  $R, r$  y  $\theta$   $P(r,t-\theta)$  es continua en  $t \in [0,2\pi]$ .

c)  $\lim_{r \rightarrow R} P(r,t-\theta) = 0$  uniformemente en  $t \in [0,2\pi] \setminus (\theta-\delta, \theta+\delta)$ ,  $\delta > 0$ .

d)  $P(r,t-\theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{s+z}{s-z}\right)$  con  $s = Re^{it}$  y  $z = re^{i\theta}$ . Además  $P(r,t-\theta)$  es

armónica en  $D(0,R)$  con  $t$  fijo.

e)  $P(r,t-\theta)$  es  $2\pi$ -periódica en  $t-\theta$ . f)  $P(0,t-\theta) = 1$

g)  $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,t-\theta) dt$ , para todo  $r$  y  $\theta$ .

4.- Sea  $F : [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  una función con una cantidad finita de discontinuidades. Se puede probar que la integral de Poisson

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,t-\theta) F(t) dt$$

representa una función armónica en  $D(0,R)$  y tal que  $\lim_{r \rightarrow R} u(r,\theta) = F(\theta_0)$

para todo  $\theta_0$  donde  $F$  sea continua. Aplicar lo anterior para resolver el

problema de Dirichlet 
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(e^{it}) = 1 \text{ si } t \in [0,\pi], \text{ en otro caso } 0. \end{cases}$$

5.- Calcúlese directamente la integral de Poisson para el valor de frontera sobre  $D(0,1)$   $f(e^{it}) = \cos 2t + \operatorname{sen} t$ .

¿Existe un camino más fácil y rápido para calcular la integral anterior?

6.- Sea el cambio a polares  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\operatorname{sen}\theta$ . Comprobar que son equivalentes:

a)  $\Delta u(x,y) = 0$

b)  $r^2 u_{rr}(r,\theta) + r u_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$

7.- a) Sea  $u$  una función armónica positiva sobre  $D(0,1)$  tal que  $u(0) = 1$ . Dar una estimación del valor  $u(1/2)$ .

b) Probar que toda función armónica no negativa en  $\mathbb{R}^2$  es constante. (Indicación: tener en cuenta las desigualdades de Harnack)