V.C.A.F. HOJA-5

1.- Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, con f entera y biyectiva. Probar que $f(z) = az + b$, para $a,b \in \mathbb{C}$. (**Indicación:** considerar $g(z) = f(1/z)$, ver que tiene un polo en $z = 0$ y deducir que f es un polinomio).

2.- Sean $f,g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, Ω abierto conexo, $f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y con $|f(z)| = |g(z)|$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\theta \in [0,2\pi]$ tal que $f(z) = e^{\theta i}g(z)$.

3.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω abierto conexo de modo que $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2\} \subseteq \Omega$. Si $|f(z)| \le 1$ para $|z| = 1$ y $|f(z)| \le 4$ para $|z| = 2$, probar que $|f(z)| \le |z|^2$ para $1 \le |z| \le 2$.

4.- Sea $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ una transformación de Möbius de modo que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Probar que a,b,c y $d \in \mathbb{R}$.

5.- a) Encontrar una transformación de Möbius f tal que $f(0) = -1$, $f(i) = 0$ y $f(\infty) = 1$.

b) Para la transformación anterior determinar los conjuntos:

i) $f(i\mathbb{R})$ ii) $f(\{z : \operatorname{Re} z>0\})$ iii) $f(\mathbb{R})$ iv) $f(\{z : \operatorname{Im} z>0\})$

v) $f(\{z : \operatorname{im} z = i\})$ vi) Determinar las imagenes por f de las rectas paralelas a los ejes coordenados.

6.- Sea $g(z) = \overline{1/z}$ la inversión geométrica con respecto a $\partial D(0,1)$. Probar las siguientes propiedades de g:

a) $g(z) = z/|z|^2$ y $g \circ g$ es la identidad.

b) $\forall z \in \partial D(0,1)$ $g(z) = z$

c) Sea $R = \{z = ta : t \in \mathbb{R}\}$, $a \in \mathbb{C}$, una recta vectorial, entonces $g(R) = R$

d) $g(\partial D(0,r)) = \partial D(0,1/r)$, $\forall r>0$.

e) Sea $R = \{z : \langle z,a\rangle + b = 0\}$, $a,b \in \mathbb{C}$ y $b \neq 0$, una recta afín, entonces $g(R) = \partial D(p/2|p|^2, 1/2|p|)$, donde $p \in R$ y p es ortogonal, como vector, a R.

f) $g(\partial D(a,|a|) = R$ la recta afín $\{z : \langle z,\overline{1/2a}\rangle - |\overline{1/2a}|^2 = 0\}$

g) $g(\partial D(a,r)) = \partial D(b,s)$, donde $r \neq |a|$, $b = \dfrac{1}{(1 - r^2/|a|^2)\overline{a}}$ y

$s = \dfrac{r}{\left|\,|a|^2 - r^2\right|}$

7.- Establecer una biyección holomorfa entre el sector circular $C = \{z : |z| < 1$ y $0 \le \arg(z) < \pi/4\}$ y el semiplano $S = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$

8.- Sea $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$, f holomorfa.

a) Si $f(0) = 0$ y $f(a) = a$, para algún $a \neq 0$, probar que $f(z) = z$.

b) Si $f(a) = a$ y $f(b) = b$, con $a \neq b$ puntos de $D(0,1)$, probar que $f(z) = z$.(Indicación: considerar el automorfismo del disco $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$)

9.- Sea $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$, f holomorfa y tal que $f(0) = 1/2$.

a) Probar que $|f'(0)| \leq 3/4$

b) Encontrar una función f en las condiciones de a) tal que $f'(0) = -3/4$. ¿Cuantas funciones de este tipo hay?

10.- Sea la transformación de Möbius $T(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

a) Encontrar T^{-1} y comprobar que $T(\{ \operatorname{Re} z>0 \}) = D(0,1)$.

b) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, con $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ en $D(0,1)$. Probar $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D(0,1)$.

c) Si, además, $f(0) = 1$, probar que $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$ para todo $z \in D(0,1)$. Además, probar que $|f'(0)| \leq 2$.

11.- Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ con $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$. Sean $\alpha, \beta \in D(0,1)$ tales que $f(\alpha) = \beta$, probar que se verifica la siguiente desigualdad:

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$