HOJA 1:

PROBLEMA 1:

$$|a| = |a+b-b| \le |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a+b|$$
$$|b| = |b+a-a| \le |a+b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \le |a+b|$$

ASI $\quad \big|\, |a| - |b| \,\big| \le |a+b|$

PROBLEMA 2: $(1+|v|^2)u = (1+|u|^2)v$

ASI $\quad u = \dfrac{1+|u|^2}{1+|v|^2} v = \lambda v$

POR TANTO $\lambda v = \dfrac{1+\lambda^2|v|^2}{1+|v|^2} v$, SI $a = |v|^2$

$$\lambda = \frac{1+\lambda^2 a}{1+a} \Leftrightarrow \lambda^2 a - (1+a)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{(1+a) \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4a}}{2a} = \frac{(1+a) \pm \sqrt{(1-a)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{1}{a} \end{cases}$$

SI $\lambda = 1 \quad u = v$

SI $\lambda = \frac{1}{a} \quad u = \dfrac{1}{|v|^2} v \quad$ ASI $\quad \bar{u}\, v = \dfrac{1}{|v|^2} \bar{v} \cdot v = 1.$

PROBLEMA 3: $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $u^2 + v^2 = |f|^2 = cte$

SI $u = 0 \Leftrightarrow v = 0$ Y ASI $f \equiv 0$. EN OTRO CASO

DERIVANDO
$$2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{COMO } u \ne 0 \text{ y } v \ne 0$$
$$2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

IMPLICA QUE
$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \underset{\text{E. CAUCHY RIEMANN}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

ASI $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ SON NULAS, COMO $\frac{\partial v}{\partial x}$ Y $\frac{\partial v}{\partial y}$. POR TANTO U Y V SON CONSTANTES.

HOJA 1:

PROBLEMA 4:

b) $f(z)=f(x,y)=x+ay+i(bx+cy)=u(x,y)+iv(x,y)$

f ES DIFERENCIABLE CON CONTINUIDAD

y $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=a$, $\frac{\partial v}{\partial x}=b$ y $\frac{\partial v}{\partial y}=c$.

f SERÁ DERIVABLE SI SE VERIFICAN LAS CONDICIONES DE CAUCHY RIEMANN, ASÍ $1=c$

$a=-b$.

PROBLEMA 5:

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(z-a)^n}$, APLICANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE A LA SERIE EN VALOR ABSOLUTO

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{|z-a|^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{|z-a|^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{1}{|z-a|}=\frac{1}{|z-a|}<1$$

LUEGO LA SERIE CONVERGE EN $\{z:\ |z-a|>1\}$

NOTAR QUE SI $|z-a|=1$, $\left|\frac{\sqrt{n}}{(z-a)^n}\right|=\sqrt{n}\ \underset{n\to\infty}{\not\to}\ 0$,

LUEGO EN ESTE CASO NO HAY CONVERGENCIA.

PROBLEMA 6: SEA $h(z)=-z^2$ y $g(z)=z-1$

$h,g\in H(D(0,2))$. LAS SUCESIONES $\frac{1}{n}\to 0$ y $\frac{n+1}{n}\to 1$ SON SUCESIONES DE $D(0,2)$ y $f(\frac{1}{n})=-\frac{1}{n^2}=h(\frac{1}{n})$

y $f(\frac{n+1}{n})=f(1+\frac{1}{n})=g(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$.

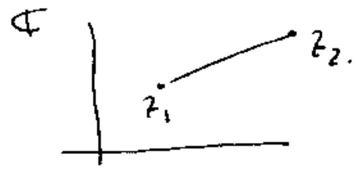
LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD NOS DICEN QUE SI $f\in H(D(0,2))$ ENTONCES $f=g=h$ EN $D(0,2)$ LO CUAL NO ES VERDAD.

HOJA 1:

PROBLEMA 7:

$$\int_{[z_1, z_2]} z \, dz = \int_{[z_1, z_2]} g'(z) \, dz \underset{\text{REGLA DE BARROW}}{=}$$

$f(z) = z \in H(\mathbb{C})$; sea $g(z) = \frac{z^2}{2}$



$$= g(z_2) - g(z_1) = \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}$$

HOJA 1:

PROBLEMA 9:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen} 2bx\,dx = 0$$

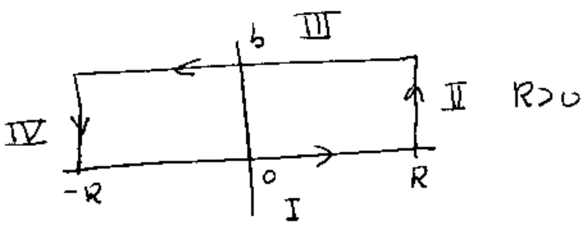
PARA VER ESTAS IGUALDADES TENDREMOS EN CUENTA: a) EL TEOREMA DE CAUCHY

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$

DEM SEA $f(z) = e^{-z^2}$

Y SEA EL CAMINO CERRADO γ_R

$\gamma_R^* = I^* \cup II^* \cup III^* \cup IV^*$



ASI POR EL TEOREMA DE CAUCHY

$$0 = \int_{\gamma_R} e^{-z^2}dz = \int_I e^{-z^2}dz + \int_{II} e^{-z^2}dz + \int_{III} e^{-z^2}dz + \int_{IV} e^{-z^2}dz$$

CONSIDERANDO

I $[-R,R] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow (t,0)$

II $[0,b] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow (R,t)$

III $[-R,R] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow -t+bi$

IV $[0,b] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow -R+(b-t)i$

ASI

$$0 = \int_\gamma e^{-z^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-t^2}dt + \int_0^b i\,e^{-(R+ti)^2}dt + \int_{-R}^{R} -e^{-(-t+bi)^2}dt + \int_0^b -i\,e^{-(-R+(b-t)i)^2}dt =$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-t^2}\left[1 - e^{2tbi+b^2}\right]dt + i\int_0^b e^{-R^2}\left[e^{-2tRi+t^2} - e^{2R(b-t)i+(b-t)^2}\right]dt.$$

LO ANTERIOR ES INDEPENDIENTE DEL VALOR CONCRETO DE R; ASI SI $R \longrightarrow \infty$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[1 - e^{b^2}\left[\cos 2xb - i \operatorname{sen} 2xb\right]\right] dx$$

YA QUE

$$\left| i \int_0^b e^{-R^2}\left[e^{-2tRi+t^2} - e^{2R(b-t)i + (b-t)^2}\right] dt \right| \leq$$

$$\leq e^{-R^2} \int_0^b \left| e^{-2tRi+t^2}\left[1 - e^{2Rbi + b^2 - 2tb}\right]\right| dt \leq$$

$$\leq e^{-R^2} \int_0^b e^{t^2} \left| 1 - e^{b^2-2tb} e^{2Rbi} \right| dt \leq$$

$$\leq e^{-R^2} \int_0^b e^{t^2} (1 + e^{b^2-2tb}) dt \leq$$

$$\leq e^{-R^2} \cdot b \cdot \sup\{(1 + e^{b^2-2tb}) e^{t^2} : t \in [0,b]\} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

ASI

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[\cos 2xb - i \operatorname{sen} 2xb\right] dx$$

ES DECIR

$$\sqrt{\pi} \cdot e^{-b^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xb \, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \operatorname{sen} 2xb \, dx$$

ASI $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \operatorname{sen} 2xb \, dx = 0}$

AHORA COMO $e^{-x^2} \cos 2xb$ ES UNA FUNCION PAR

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xb \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}}$$

HOJA 1:

PROBLEMA 10:

SEA $g(z) = z f(z) \in H(\mathbb{C})$ YA QUE $h(z) = z \in H(\mathbb{C})$ $f \in H(\mathbb{C} - \{0\})$ Y $\exists \lim_{z \to 0} z f(z) = 1$, LUEGO g ES CONTINUA EN TODO $\mathbb{C}$; POR EL TEOREMA DE MORERA $g \in H(\mathbb{C})$.

LUEGO $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. (g SE PUEDE DESARROLLAR EN SERIE DE POTENCIAS)

POR TANTO $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} =$

$= \frac{1}{z} + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}$

COMO $g \in H(\mathbb{C})$, EL RADIO DE CONVERGENCIA DE $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}$ ES INFINITO

Y $\lim_{z \to \infty} f(z) = a_1 + \lim_{z \to \infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \right) = 1$

LUEGO $\lim_{z \to \infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \right) = 1 - a_1$, POR SER ENTERA EL TEOREMA DE LIOUVILLE NOS DICE QUE ES CONSTANTE

Y COMO $\sum_{n=2}^{\infty} a_n 0^{n-2} = 0$, ES NULA

ASI $f(z) = \frac{1}{z} + 1 = \frac{z+1}{z}$.