# HOJA 3:

PROBLEMA 3.1

a) # $\Omega - A$ ES ABIERTO, YA QUE $\mathbb{C} - \Omega$ ES CERRADO

Y SI $z \in \Omega - A$ NO EXISTE $(z_n) \subseteq A$ CON $z_n \to z$.

POR SER A DISCRETO.

# $\Omega - A$ ES CONEXO, YA QUE SI $G_1$ Y $G_2$ SON ABIERTOS

CON $G_1 \cup G_2 = \Omega - A$ Y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

$\forall a \in A$, O BIEN $a \in G_1$ O BIEN $a \in G_2$

ESTO ES ASÍ YA QUE SI $a \notin G_1 \cup G_2$ $\exists \delta > 0$ CON

$D(a,\delta) \subseteq \Omega$ Y $D(a,\delta) \cap A = \{a\}$.

ASÍ $\underbrace{D(a,\delta) - \{a\}}_{\text{ABIERTO}} = \underbrace{[G_1 \cap (D(a,\delta) - \{a\})]}_{\text{ABIERTO}} \cup \underbrace{[G_2 \cap (D(a,\delta) - \{a\})]}_{\text{ABIERTO}}$

COMO $D(a,\delta) - \{a\}$ ES CONEXO Y ESTÁ ESCRITO COMO UNIÓN DE ABIERTOS DISJUNTOS, SE SIGUE QUE

$G_1 \cap D(a,\delta) = \emptyset$ Y $D(a,\delta) - \{a\} \subseteq G_2$

LUEGO $G_2 \cup \{a\}$ ES ABIERTO Y $G_1 \cap (G_2 \cup \{a\}) = \emptyset$

PODEMOS TOMAR $G_1 = G_1$ Y $G_2' = G_2$.

LUEGO PODEMOS SUPONER QUE $\forall a \in A \Rightarrow a \in G_1$ O $a \in G_2$

ASÍ $G_1 \cup G_2 = \Omega$ LO CUAL NO ES POSIBLE POR SER $\Omega$ CONEXO

b) SI $f, g \in M(\Omega)$, ES CLARO QUE $f+g$ Y $f \cdot g \in M(\Omega)$

SI $f \in M(\Omega)$ Y $S_f = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ ES DISCRETO, ASÍ $\frac{1}{f} \in M(\Omega)$ Y $f \cdot 1/f = 1$. PROBAR EL RESTO DE PROPIEDADES ES TRIVIAL

c) SEAN $f, g \in M(\Omega)$ Y SEAN $P_f = \{z \in \Omega : z \text{ POLO DE } f\}$ Y $P_g$

$f, g \in H(\Omega - (P_f \cup P_g))$

$\Omega - P_f \cup P_g$ ES ABIERTO Y CONEXO. $\Rightarrow f = g$ EN $H(\Omega - (P_f \cup P_g))$

SI $\exists D(a,r) \subseteq \Omega$, Y $f|_{D(a,r)} = g|_{D(a,r)}$ POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD. ADEMÁS $P_f = P_g$, SI NO $\exists a$ CON $a$ POLO DE $g$ Y TAL QUE $\exists f'(a)$, COMO $f = g$ EN $D(a,\delta) - \{a\}$ EL DESARROLLO DE LAURENT DE $f$ Y $g$ COINCIDE EN $D(a,\delta) - \{a\}$.

LUEGO $a$ ES POLO PARA $f$ O $g$ O NO LO ES PARA AMBAS.

# HOJA 3ª

PROBLEMA 6:) $f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{e^z}{z}=$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$$ ASÍ $f$ TIENE UN POLO

DE ORDEN 2 EN $z=0$ CUYO RESIDUO ES $\underline{\underline{2}}$

PROBLEMA 7:)

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{e^{2i\pi z^3}-1}\,dz$ DONDE $\gamma(t)=re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ Y

$n<r^3<n+1$, $n\in\mathbb{N}$.

$$f(z)=\frac{z^2}{e^{2i\pi z^3}-1}$$ TIENE POLOS EN $z^3\in\mathbb{Z}$.

POLO DE ORDEN 1 SI $z^3\neq 0$

$$\lim_{z\to\sqrt[3]{n}}(z-\sqrt[3]{n})\frac{z^2}{e^{2i\pi z^3}-1}\underset{\text{L'HÔPITAL}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{z\to\sqrt[3]{n}}\frac{z^2+2z(z-\sqrt[3]{n})}{3z^2\,2i\pi\, e^{2i\pi z^3}}=$$

$$=\lim_{z\to\sqrt[3]{n}}\frac{1}{2i\pi e^{2i\pi z^3}}-\frac{\sqrt[3]{n}}{3z\, i\pi\, e^{2i\pi z^3}}=$$

$$=\frac{1}{2i\pi}-\frac{\sqrt[3]{n}}{3\sqrt[3]{n}\, i\pi}=\frac{1}{2i\pi}-\frac{1}{3i\pi}=\frac{1}{i\pi 6}=\operatorname{Res}(f,\sqrt[3]{n})$$

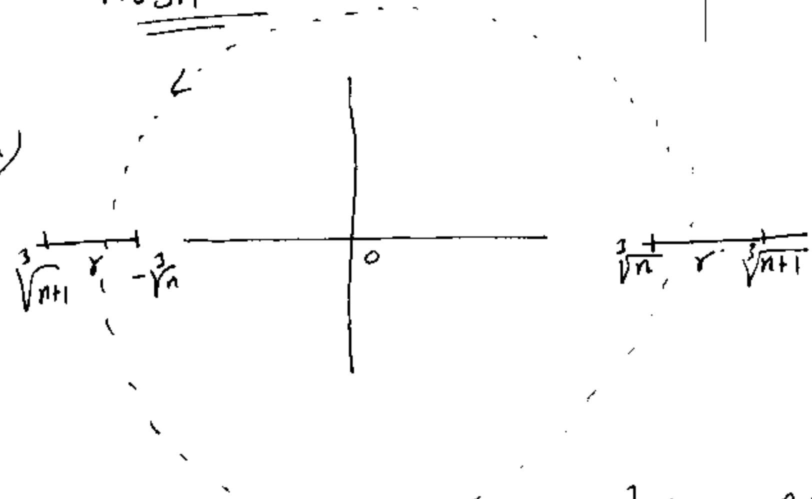
PARA $z=0$ $\quad\frac{1}{f(z)}=\frac{e^{2i\pi z^3}-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2i\pi z^3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(2i\pi)^n z^{3n-2}$

LUEGO $z=0$ CERO DE ORDEN 1 PARA $\frac{1}{f}$ Y ASÍ $f$ TIENE UN POLO DE ORDEN 1 EN $z=0$

$$\lim_{z\to 0} z\frac{z^2}{e^{2i\pi z^3}-1}\underset{\text{L'HÔPITAL}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{z\to 0}\frac{3z^2}{3z^2\,2\pi i\, e^{2i\pi z^3}}=\frac{1}{2\pi i}=\operatorname{Res}(f,0)$$

HOJA 3:

PROBLEMA 7: a)



$$\int_\gamma \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1} = 2\pi i \sum_{\sqrt[3]{k}\in[-r,r],\ k\in\mathbb{Z}-\{0\}} \operatorname{Res}(f,\sqrt[3]{k})\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(\sqrt[3]{k}) + \operatorname{Res}(f,0)\operatorname{Ind}_\gamma(0)$$

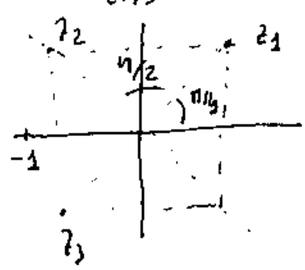
TEOREMA DE LOS RESIDUOS

$$= 2\pi i\left[2n\,\frac{1}{2\pi 6} + \frac{1}{2\pi i}\right] = \frac{2n}{3}+1$$

$\sqrt[3]{n} < r$

PROBLEMA 7: b) $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4}$ $\gamma^* = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-xy+y^2+x+y=0\}$

LAS CUATRO RAÍCES DE $z=-1$ SON
$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$




POLOS DE ORDEN 1 DE $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$

$$x^2-xy+y^2+x+y = x^2-2x\frac{(y-1)}{2}+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2-\frac{(y-1)^2}{4}+y^2+y =$$

$$=\left(x-\frac{y-1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}y^2+y/2+y-\frac{1}{4} =$$

$$=\left(x-\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{2}y-\frac{1}{4} =$$

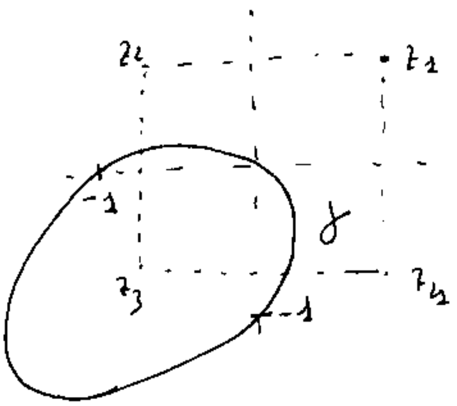
$$\left(x-\frac{y-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}-\frac{1}{4} = \left(x-\frac{y-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=0 \quad (*)$$

SI $y=0$ $x^2+x=0$ $\Rightarrow$ $x=0$ ó $x=-1$
SI $x=0$ $y^2+y=0$ $\Rightarrow$ $y=0$ ó $y=-1$
POR (*) $y<\frac{1}{\sqrt{2}}$

# HOJA 3.

PROBLEMA 7:

b) $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} =$




SI $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$

COMPROBAR QUE

$g(z_3) < 0$

Y $g(z_1), g(z_2)$ Y $g(z_3) > 0$

AHORA $Res(f, z_3) = \lim_{z \to z_3} (z - z_3) \frac{1}{1-z^4} =$

$$= \frac{1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)} = \frac{1}{2z_3\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{-\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} i}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} \underset{\text{T. RESIDUOS}}{=} 2\pi i \, Res(f, z_3) \cdot Ind_\gamma(z_3) = \frac{2\pi i}{-\frac{4}{\sqrt{2}}(1+i)}.$$

PROBLEMA 9: APLICACIÓN DEL TEOREMA DE ROUCHÉ

- SI $|z| \leq 1$ $\quad |z^8 + 6iz^2| \leq |z|^8 + 6|z|^2 \leq 1 + 6 = 7.$

LUEGO $z^8 + 6iz^2 + 8 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D(0,1)}$.

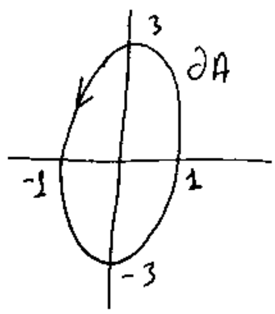
- POR OTRO LADO SI $|z| = 2$ $\quad |z^8 + 6iz^2 + 8 - z^8| \leq 6 \cdot 2^2 + 8 = 24 + 8 < 2^8$

LUEGO POR EL TEOREMA DE ROUCHÉ $z^8 + 6iz^2 + 8$ TIENE LAS MISMAS RAÍCES QUE $z^8$ EN $D(0,2)$; COMO $z^8$ TIENE 8 RAÍCES EN $z=0$ (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA), LAS MISMAS QUE $z^8 + 6iz^2 + 8$ Y POR LO VISTO ANTERIORMENTE, TODAS CAEN EN EL ANILLO $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

HOJA 3:

PROBLEMA 10:

a) $f(z) = e^{iz}$ y $A = \{x+iy : 9x^2 + y^2 \le 9\}$



f es entera, por el teorema del módulo máximo $|f|$ alcanza su máximo en $\partial A$

$|f(z)| = |e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}$

Si $z = x+iy \in \partial A \Rightarrow y = \pm\sqrt{9-9x^2}$, $x \in [-1,1]$

Si $g(x) = e^{-(-\sqrt{9-9x^2})} = e^{\sqrt{9-9x^2}}$ alcanza su máximo en $x=0$ y por tanto $y=-3$

PROBLEMA 11:

Por el principio del argumento

$$N^{\underline{o}} \text{ ceros en } D(a,r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0).$$

$\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, curva cerrada, por tanto $f\circ\gamma$ es una curva cerrada, como $|f\circ\gamma(t)| = k = cte$ se sigue que $f\circ\gamma$ es una circunferencia de centro 0 y radio $k$; así $\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) > 0$.

PROBLEMA 12:

$$|P(z) - 3z^n| = \left|1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \le$$

$$\underset{\text{si } |z|=1}{\le} e < \underset{|z|=1}{|3z^n| = 3}$$

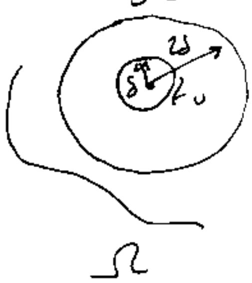
, por el teorema de Rouché $P(z)=0$ tiene $n$ raíces en $D(0,1)$, ya que $3z^n = 0$ tiene a $z=0$ como raíz de orden $n$ en $D(0,1)$

HOJA 3ª

PROBLEMA 13:] Como $(f_n) \in H(\Omega)$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre los compactos de $\Omega$, se sigue que $f \in H(\Omega)$

[por el teorema de Weierstrass]

Si $f(z_0) = 0$, $z_0 \in \Omega$, este cero es aislado, por los teoremas de identidad; y así $\exists \delta > 0$ con $\overline{D(z_0, 2\delta)} \subseteq \Omega$ y $\forall z \in \overline{D(z_0, 2\delta)} - \{z_0\}$, $f(z) \neq 0$.



Como $f_n \to f$ uniformemente en $\partial D(z_0, \delta)$

y también $f_n' \to f'$ " en $\partial D(z_0, \delta)$

y $f$ no se anula en $\partial D(z_0, \delta)$ y por tanto $f_n$ no se anula en $\partial D(z_0, \delta)$ $\forall n \geq n_0$.

(*) [En otro caso por la convergencia uniforme y la compacidad de $\partial D(z_0, \delta)$ se tendría que $f$ se anularía en algún punto de $\partial D(z_0, \delta)$]

Así $\dfrac{f_n'(z)}{f_n(z)} \longrightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ uniformemente en $\partial D(z_0, \delta)$.

Por tanto como $z_0$ es de orden $N$, y es el único cero de $f$ en $D(z_0, \delta)$, por el principio del argumento

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \delta)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \delta)} \frac{f_n'(z)}{f(z)} dz$$

Como por el principio del argumento $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \delta)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz \in \mathbb{Z}$

se sigue que $\exists n_0 : n \geq n_0$ $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \delta)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = N$.

luego cada $f_n$, $n \geq n_0$ tiene $N$ ceros en $D(z_0, \delta)$, de modo que convergen a $z_0$, de otro modo por (*) $f$ tendría ceros en $D(z_0, \delta)$ distintos de $z_0$.