HOJA 5ª

PROBLEMA 2: SI $f \equiv 0 \equiv g$ ES OBVIO

SEA $z_0 \in \Omega$ CON $g(z_0) \neq 0$ Y SEA $D(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ CON $g(z) \neq 0$ $\forall D(z_0, \varepsilon)$, $\frac{f}{g} \in H(D(z_0,\varepsilon))$ Y $\left|\frac{f}{g}\right| \equiv 1$, LUEGO POR EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO $\frac{f}{g} \equiv cte = \alpha$, CON $|\alpha| = 1$, ASÍ $\alpha = e^{i\theta}$ PARA ALGÚN $\theta \in [0, 2\pi]$; POR TANTO $f(z) = e^{i\theta} g(z)$ $\forall z \in D(z_0,\varepsilon)$ Y POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD, LA IGUALDAD SE DA EN TODO Ω.

PROBLEMA 3: SEA $h(z) = \frac{f(z)}{z^2} \in H(\Omega - \{0\})$.

SI $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq z \leq 2\} \subseteq \Omega$.

POR EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO Y MÍNIMO,

$$\min |f_{|A}| = \min |f|_{|\partial A} \leq 1$$

$$\max |f_{|A}| = \max |f|_{|\partial A} \leq 4$$

ASÍ $\max |h_{|A}| = \max |h_{|\partial A}| \leq \max \left\{ \frac{1}{1}, \frac{4}{4} \right\} = 1$

ASÍ $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right| \leq 1$ $\forall z \in A$ Y DESPEJANDO $|f(z)| \leq |z|^2$.

PROBLEMA 4: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ CON $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R})$

ASÍ $f(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$, $f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $b = \lambda_1 d$ Y $a = \lambda_2 c$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$f(1) = \frac{a+b}{c+d} = \frac{\lambda_2 c + \lambda_1 d}{c+d} = \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ASÍ $\lambda_2 c + \lambda_1 d = \lambda_3 c + \lambda_3 d$.

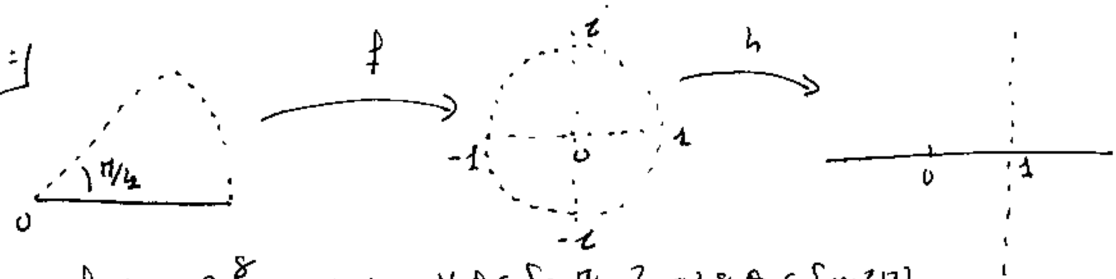
$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_3) c = (\lambda_3 - \lambda_1) d$, COMO $ad - bc \neq 0$ Y d Ó $c \neq 0$

TOMANDO $d = 1$ (Ó BIEN $c = 1$) $\Rightarrow \begin{cases} c \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$, $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$

etc.

HOJA 5ª

PROBLEMA 7:



SEA $f(z)=z^{8}$ COMO $\forall \theta \in [0,\pi/4] \Rightarrow 8\theta \in [0,2\pi]$

$f(C)=D(0,1)$

SEA $h(z)=\dfrac{-iz-2i-1}{z-i}$ LA TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS TAL QUE $\begin{cases} h(-1)=1 \\ h(-i)=1-i \\ h(i)=\infty \end{cases}$ CON $h(0)=2+\frac{1}{i}=2-i\in S$

ASÍ $h(D(0,1))=S$; $h\circ f$ ES UNA SOLUCIÓN POSIBLE

PROBLEMA 8:

a) f SATISFACE LAS HIPÓTESIS DEL LEMA DE SCHWARZ, ASÍ f ES UN GIRO:

$f(z)=\lambda z$ CON $|\lambda|=1$

COMO $f(a)=\lambda a=a \Rightarrow \lambda=1$

b) SEA $\varphi_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ AUTOMORFISMO DEL DISCO, CON $\varphi_a(a)=0$

ASÍ $\varphi_a\circ f: D(0,1)\to D(0,1)$ Y $\varphi_a\circ f(a)=0$

Y POR TANTO $\varphi_a\circ f\circ \varphi_{-a}(0)=0$

SI $b\neq a$, $\varphi_a(b)=c$, ASÍ $\varphi_a\circ f\circ\varphi_{-a}(c)=\varphi_a\circ f(b)=\varphi_a(b)=c$

LUEGO POR EL APARTADO a) $\varphi_a\circ f\circ\varphi_{-a}(z)=z$.

ASÍ $f\circ\varphi_{-a}(z)=\varphi_{-a}(z)$ $\forall z\in D(0,1)$

Y COMO φ_{-a} ES UN AUTOMORFISMO $\Rightarrow$ $f(z)=z$ $\forall z\in D(0,1)$

HOJA 5:

PROBLEMA 9: a) SEA $\varphi_{1/2} = \dfrac{z - 1/2}{1 - 1/2\, z}$ AUTOMORFISMO

DEL DISCO CON $\varphi_{1/2}(1/2) = 0$; ASÍ $\varphi_{1/2} \circ f$ SATISFACE

EL LEMA DE SCHWARZ Y $|(\varphi_{1/2} \circ f)'(0)| \leq 1$

$$|\varphi_{1/2}'(f(0)) \cdot f'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{1}{|\varphi_{1/2}'(1/2)|} = 3/4$$

YA QUE $\varphi_{1/2}' = \dfrac{(1 - 1/2\, z) + 1/2(z - 1/2)}{(1 - 1/2\, z)^2}$

$$\varphi_{1/2}'(1/2) = \frac{3/4}{(3/4)^2} = 4/3$$

b) SEA $f : D(0,1) \to D(0,1)$, $f \in H(D(0,1))$, $f(0) = 1/2$ Y $f'(0) = -3/4$

ENTONCES $\varphi_{1/2} \circ f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$

$\varphi_{1/2} \circ f(0) = \varphi_{1/2}(1/2) = 0$ Y ADEMÁS $(\varphi_{1/2} \circ f)'(0) =$

$$= \varphi_{1/2}'(1/2) \cdot f'(0) = 4/3\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

ASÍ $|(\varphi_{1/2} \circ f)'(0)| = 1$, POR EL LEMA DE SCHWARZ

$\exists \lambda \in \mathbb{C}$ CON $|\lambda| = 1$ Y $\varphi_{1/2} \circ f(z) = \lambda z$

ASÍ $f(z) = \varphi_{-1/2}(\lambda z)$

COMO $(\varphi_{-1/2})'(0) = \dfrac{1}{(\varphi_{1/2})'(\varphi_{-1/2}(0))} = \dfrac{1}{\varphi_{1/2}'(1/2)} = \dfrac{3}{4}$

TEOR. F. INVERSA

Y $f'(z) = \lambda\, \varphi_{-1/2}'(\lambda z) \Rightarrow f'(0) = -3/4 = \lambda\, \varphi_{-1/2}'(0)$

POR TANTO $\lambda = -1$ Y f ES ÚNICA