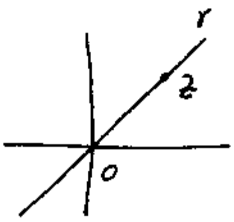
PRÁCTICA 1ª

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

1º SEA $z \in \mathbb{C}-\{0\}$. PROBAR QUE $z, -z, \left(\overline{\frac{1}{z}}\right), \frac{-1}{z}$ Y 0 ESTÁN ALINEADOS.

INDICACIÓN
$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

SE LA RECTA VECTORIAL $w(t) = tz \quad t \in \mathbb{R}$.



RECTA QUE PASA POR z Y 0

OBVIAMENTE $-z$ PERTENECE A r.

$$\left(\overline{\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{\bar z} = \frac{z}{z\cdot\bar z} = \frac{z}{|z|^2} \in r \quad \text{PARA } t = \frac{1}{|z|^2}$$

$$-\frac{1}{\bar z} = -\frac{1}{|z|^2}\cdot z$$ LUEGO TAMBIÉN PERTENECE A r.

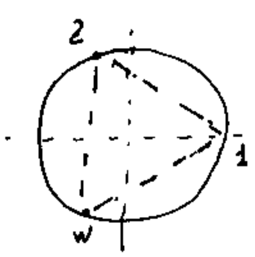
2º SEAN $z, w, t \in \mathbb{C}$ CON $|z|=|w|=|t|=1$ Y $z+w+t=0$. COMPROBAR QUE ESTOS TRES PUNTOS SON LOS VÉRTICES DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO

INDICACIÓN
GIRAR LA FIGURA PARA QUE $t=1$.
¿CÓMO SE PUEDE HACER ESTE GIRO?
RECORDAD EL SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA MULTIPLICACIÓN

COMO $t \neq 0$ $\left|\frac{1}{t}\right| = 1$ Y $\frac{1}{t} \neq 0$, ASÍ

$$\frac{z}{t} + \frac{w}{t} + 1 = 0 \quad Y \quad \left|\frac{z}{t}\right| = \left|\frac{w}{t}\right| = 1.$$

MULTIPLICANDO POR $\frac{1}{t}$, PODEMOS SUPONER QUE
MULTIPLICAR POR $\frac{1}{t}$ UN PUNTO ES 1 ¿? COMO $\left|\frac{1}{t}\right| = 1$, ES LO MISMO QUE GIRAR CON CENTRO CERO Y ÁNGULO $\mathrm{Arg}\,\frac{1}{t}$.



SI $z = a+bi \Rightarrow w = -1-(a+bi) = -(1+a)-bi$

Y $a^2+b^2 = (1+a)^2+b^2 \Rightarrow 1+2a = 0$ ASÍ $a = -1/2$ Y $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Y $w = -1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$|z-1|^2 = \left|-3/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$|w-1|^2 = \left|-3/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^2 = \frac{9}{4} - 3/4 = \frac{12}{4} = 3$$

$$|z-w|^2 = |\sqrt{3}i|^2 = 3$$

LUEGO LOS TRES LADOS DEL TRIÁNGULO SON IGUALES.

3º DIBUJAR LOS CONJUNTOS SIGUIENTES Y DECIDIR CUAL ES ABIERTO, CUAL CERRADO, CUAL COMPACTO Y CUAL <u>NO</u> CONEXO.

$A = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [1,2) \cup [3,4) \}$

$B = \{ z \in \mathbb{C} : 2 < \operatorname{Re} z < \pi \}$

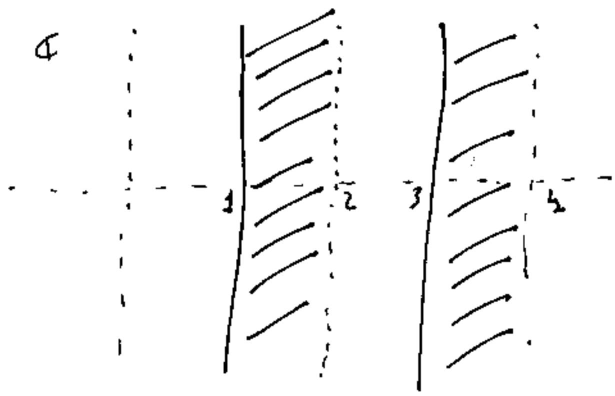
$C = \{ z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z-a| \leq r_2 \}$

$D = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Re} z \}$

<u>INDICACIÓN</u>

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ES CONEXO SI <u>NO</u> EXISTEN DOS ABIERTOS, NO VACÍOS Y DISJUNTOS A_1 Y A_2 TALES QUE $\Omega = A_1 \cup A_2$.

A]



<u>NO</u> CONEXO

$A = \{ z : \operatorname{Re} z < 2+\frac{1}{2} \} \cup \{ z : \operatorname{Re} z > 2+\frac{1}{2} \}$

A UNIÓN DE ABIERTOS DISJUNTOS

B]

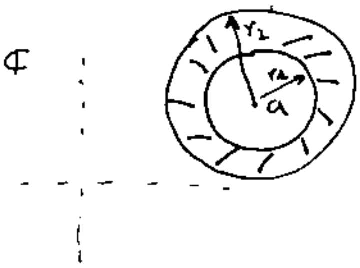
ABIERTO

$\operatorname{Re} \; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow \operatorname{Re}(x,y) = x$ ES CONTINUA

$B = \operatorname{Re}^{-1}(2,\pi)$.

C]

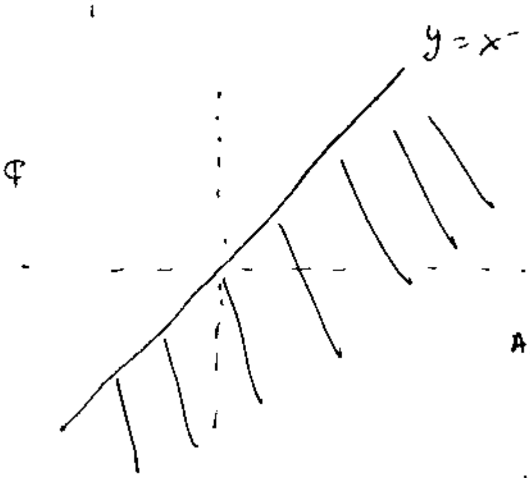


COMPACTO

$| \; | \; \mathbb{C} \longrightarrow [0,\infty)$ CONTINUO

$C = | \; |^{-1}([r_1, r_2])$ CERRADO Y CLARAMENTE ESTÁ ACOTADO

D]



CERRADO

SEA $(z_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subseteq D$ CON $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$

ASÍ $\operatorname{Re} z_n \geq \operatorname{Im} z_n$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\operatorname{Re} z_0 \geq \operatorname{Im} z_0$

$\Rightarrow z_0 \in D$, ASÍ

D ES CERRADO

4) SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ UN CONJUNTO ABIERTO Y SEA $C \subseteq \Omega$ UNA COMPONENTE CONEXA. PROBAR QUE C ES ABIERTO

SEA $a \in C$, EXISTE $r>0$ CON $D(a,r) \subseteq \Omega$ POR SER Ω ABIERTO.

SEA $C' = C \cup D(a,r) \subseteq \Omega$, CONEXO YA QUE ES UNIÓN DE CONEXOS NO DISJUNTOS.

COMO C ES COMPONENTE CONEXA DE Ω, $C' = C$ ASÍ EN PARTICULAR $D(a,r) \subseteq \Omega$ Y POR TANTO C ES ABIERTO

INDICACIÓN

(*) $C \subseteq \Omega$ ES COMPONENTE CONEXA SI ES CONEXO Y NO EXISTE $C' \subseteq \Omega$ CON C' CONEXO Y $C \subseteq C'$

(**) USAR QUE SI A Y B SON CONEXOS Y $A \cap B \neq \emptyset$, ENTONCES $A \cup B$ ES CONEXO ¿POR QUÉ?

(**) SEAN A Y B CONEXOS CON $A \cap B \neq \emptyset$. SI $\exists\, C_1$ Y C_2 ABIERTOS CON $C_1 \cap C_2$ Y $A \cup B \subseteq C_1 \cup C_2$, ENTONCES $A \subseteq C_1$ Ó $A \subseteq C_2$ POR SER A CONEXO Y COMO $B \cap A \neq \emptyset$ Y B CONEXO $A \cup B \subseteq C_1$ O $A \cup B \subseteq C_2$. POR TANTO $A \cup B$ ES CONEXO

5) SEA $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-a)^n}$. CALCULAR EL DOMINIO DE f

CONSIDERAMOS $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(z-a)^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z-a|^n}$.

INDICACIÓN

USAR EL CRITERIO DEL COCIENTE.

AHORA $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{|z-a|^{n+1}}}{\frac{1}{|z-a|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|z-a|} = \frac{1}{|z-a|}$$

POR EL CRITERIO DEL COCIENTE LA SERIE CONVERGE ABSOLUTAMENTE SI $|z-a| > 1$ ($\Leftrightarrow \frac{1}{|z-a|} < 1$)

SI $|z-a| = 1$, $\frac{(-1)^n}{|z-a|^n} = 1$, LUEGO $\frac{(-1)^n}{(z-a)^n} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

POR TANTO $\mathrm{Dom} f = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| > 1\}$.

6º SEA $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ CON $R>1$. SI $\partial D(0,1) = \gamma^*$ ORIENTADA POSITIVAMENTE, CALCULAR $\int_\gamma \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz$. DEDUCIR QUE

$$2\int_0^{2\pi} \cos^2(t/2)\, f(e^{it})\,dt = \pi\left[2f(0)+f'(0)\right]$$

INDICACIÓN

USAR QUE $\int_\gamma \frac{f'(z)}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}$ ¿POR QUÉ?

USAR LA DEFINICIÓN DE INTEGRAL, EL TEOREMA DE CAUCHY Y LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY PARA $z=0$

$$\int_\gamma \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz = 2\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz + \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz$ (FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY)

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ (POR EL TEOREMA DE CAUCHY, YA QUE $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ Y γ^* ES UN CAMINO CERRADO EN $D(0,R)$).

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, f'(0) \quad \text{(FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY)}$$

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)' = \frac{f'(z)}{z} - \frac{f(z)}{z^2} \quad ; \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{REGLA DE BARROW (YA QUE } \gamma \text{ ES UN CAMINO CERRADO)}}}{0} = \int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z}\right)'dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{z}\,dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

LUEGO $\int_\gamma \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz = 4\pi i\, f(0) + 2\pi i\, f'(0)$ (*)

POR OTRO LADO USANDO LA DEFINICIÓN DE INTEGRAL A LO LARGO DE UN CAMINO, TOMANDO $\gamma(t) = e^{it}$

$$\int_\gamma \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz = \int_0^{2\pi}\left(2+e^{it}+\frac{1}{e^{it}}\right)\cdot\frac{f(e^{it})}{\cancel{e^{it}}}\cdot i\cancel{e^{it}}\,dt =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{e^{it}} = e^{-it}}}{=} \int_0^{2\pi}(2+2\cos t)\, i f(e^{it})\,dt = 2i\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\, f(e^{it})\,dt =$$

$$2i\int_0^{2\pi} 2\cos^2(t/2)\, f(e^{it})\,dt \quad (**)$$

IGUALANDO (*) Y (**) QUEDA QUE

$$2\int_0^{2\pi}\cos^2(t/2)\, f(e^{it})\,dt = \pi\left(2f(0)+f'(0)\right).$$