PRÁCTICA 7ª

NOMBRE Y APELLIDOS ....

1º SEA $h\,[a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ CONTINUA.

PROBAR QUE $\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| \le \int_a^b |h(t)|\,dt$

COMO h ES CONTINUA $\exists \int_a^b h(t)\,dt \overset{\text{not}}{=} z \in \mathbb{C}$

SEA $\alpha = \dfrac{\bar{z}}{|z|}$ ASÍ $|\alpha| = 1$ Y $\alpha \cdot z = \dfrac{\bar{z}}{|z|}\cdot z = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z|$

ASÍ $\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| = \alpha \int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b \alpha h(t)\,dt \in \mathbb{R}$

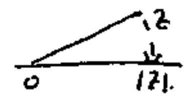
ASÍ $\alpha h(t) = Re(\alpha h(t))$ Y $Im(\alpha h(t)) = 0$,

COMO $Re(\alpha h(t)) \le |\alpha\, h(t)| = |h(t)|$ (YA QUE $|\alpha| = 1$)

$\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| = \int_a^b Re(\alpha\, h(t))\,dt \le \int_a^b |h(t)|\,dt$.

SUGERENCIA

•) SEA $z = \int_a^b h(t)\,dt \in \mathbb{C}$



¿ $\exists \alpha \in \partial D(0,1)$ CON $\alpha \cdot z = |z|$.

•) USAR $\int_a^b Re(\alpha h(t))\,dt \le \int_a^b |h(t)|\,dt$

2º SEAN $a = 3+2i$ Y $r = 3$

2.1. SEA γ^* LA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO a Y RADIO r RECORRIDA EN SENTIDO POSITIVO.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-(3+2i)}\,dz \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1$$

$\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$

$t \to a + re^{it}$

2.2. SEA h^* LA CIRCUNFERENCIA ANTERIOR RECORRIDA EN SENTIDO NEGATIVO:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_h \frac{1}{z-(3+2i)}\,dz \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{-r i e^{it}}{r e^{it}}\,dt = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = -1.$$

$h: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$

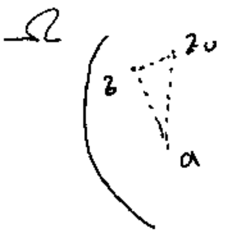
$t \to a + re^{-it}$

2.3. ¿EN LAS INTEGRALES ANTERIORES TIENE ALGUNA IMPORTANCIA LOS VALORES CONCRETOS DE a Y r? JUSTIFICA LA RESPUESTA.

COMO VEMOS EN (2.1) Y (2.2), TOMANDO a Y r GENÉRICOS, LAS INTEGRALES ANTERIORES NO DEPENDEN DE TALES PARÁMETROS

3° SUPONGAMOS QUE SOLO CONOCEMOS EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULOS: "SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ABIERTO Y SEA Δ UN TRIÁNGULO (BORDE E INTERIOR INCLUIDOS) CON $\Delta \subseteq \Omega$. SI $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ES CONTINUA EN Ω Y $f \in H(\Omega - \{p\})$, ENTONCES $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$"

SEA Ω UN ABIERTO CONVEXO Y SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ CONTINUA Y $f \in H(\Omega - \{p\})$. SI $a \in \Omega$, PROBAR QUE $F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ ES UNA PRIMITIVA DE f $\forall z \in \Omega$.



¿$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$?

COMO Ω ES CONVEXO LOS SEGMENTOS $[a,z]$, $[z,z_0]$ Y $[z_0,a]$ ESTÁN DENTRO DE Ω

SUGERENCIA

USAR LA DEFINICIÓN DE DERIVADA Y EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULOS.

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[a,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_0,a]} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULOS.

ASÍ $\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta}{z - z_0}$

AHORA $\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{[z_0,z]} f(\zeta) - f(z_0)\,d\zeta \right| \underset{(1)}{\leq} \frac{1}{|z - z_0|} \int_0^1 |f(\gamma(t)) - f(z_0)|\,|z - z_0|\,dt$

COMO f ES CONTINUA EN z_0, DADO $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $0 \leq |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

$\leq \frac{1}{|z - z_0|} \int_0^1 \varepsilon\,|z - z_0|\,dt = \varepsilon$ TOMANDO $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz$ PARAMETRIZACIÓN DE $[z_0, z]$.

LUEGO $\exists F'(z_0) = f(z_0)$.

4° SI $f \in H(\mathbb{C})$ Y EXISTE $D(a,r)$ CON $f(\mathbb{C}) \cap D(a,r) = \emptyset$, PROBAR QUE f ES CONSTANTE

SUGERENCIA

USAR ADECUADAMENTE EL TEOREMA DE LIOUVILLE.

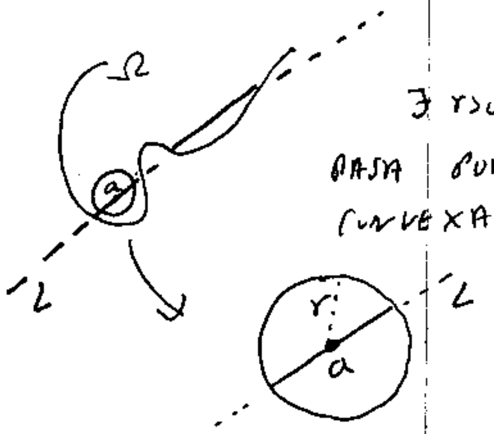
SEA $g(z) := \frac{1}{f(z) - a}$ $\forall z \in \mathbb{C}$; COMO $|f(z) - a| \geq r > 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) - a$ NO SE ANULA Y ASÍ $g \in H(\mathbb{C})$. ADEMÁS $|g(z)| = \left| \frac{1}{f(z) - a} \right| \leq \frac{1}{r}$ $\forall z \in \mathbb{C}$; LUEGO g ES ENTERA Y ACOTADA.

POR EL TEOREMA DE LIOUVILLE $g \equiv cte \neq 0$

Y ASÍ $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

5°) SEAN Ω UN ABIERTO DE $\mathbb{C}$ Y L UNA RECTA DEL PLANO. SI f ES CONTINUA SOBRE Ω Y $f \in H(\Omega - L)$ HAY QUE PROBAR QUE $f \in H(\Omega)$

5₁) REDUCIR EL PROBLEMA AL CASO DE QUE Ω ES UN DISCO Y L UNA RECTA QUE PASA POR SU CENTRO.



SEA $a \in \Omega \cap L$, COMO Ω ES ABIERTO $\exists\, r > 0$ CON $D(a,r) \subseteq \Omega$; LA RECTA L PASA POR a Y DIVIDE $D(a,r)$ EN DOS PARTES CONVEXAS. SI EL RESULTADO ES CIERTO EN ESTE CASO, e.d $f \in H(D(a,r))$, HACIENDO LO MISMO CON CADA PUNTO DE $\Omega \cap L$ VEMOS QUE $f \in H(\Omega)$

5₂) SEA $D(a,r)$ UN DISCO Y L UNA RECTA QUE PASA POR a. SEA $\Delta \subseteq D(a,r)$ UN TRIÁNGULO ¿CUÁNTAS POSICIONES RELATIVAS ENTRE Δ Y L NOS PODEMOS ENCONTRAR? DIBUJARLAS.

1:] $\Delta \cap L = \emptyset$ 2:] $\Delta \cap L = \{P\}$ SERÁ UN VÉRTICE 3:] $\Delta \cap L$ ES UN SEGMENTO. UN LADO DE Δ O NO

5₃) PARA RESOLVER 5°) APLICAR ADECUADAMENTE EL TEOREMA DE MORERA.

SI VEMOS QUE $\forall \Delta$ TRIÁNGULO, $\Delta \subseteq D(a,r) \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

EL TEOREMA DE MORERA NOS DICE QUE $f \in H(D(a,r))$.

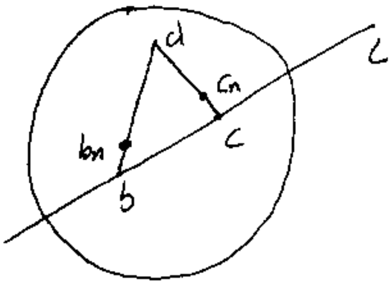
1:] SI $\Delta \cap L = \emptyset$ COMO $f \in H(D(a,r) - L)$ Y $D(a,r) - L$ ES UNIÓN DE DOS COMPONENTES CONVEXAS, EL TEOREMA DE CAUCHY NOS DICE QUE $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

2:] SI $\Delta \cap L = \{p\}$ UN PUNTO, QUE NECESARIAMENTE ES UN VÉRTICE, EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULOS NOS DICE QUE

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

3:) SI $\Delta \cap L$ = UN LADO DE Δ, SUPONGAMOS QUE

$\Delta = \widehat{bdc}$ CON $[a,b]$ SOBRE L



SEA $(b_n) \to b$ $(b_n) \subseteq [d,b)$
(SOBRE EL LADO $\overline{db}$
CON $b_n \neq b$).

SEA $(c_n) \to c$ $(c_n) \subseteq [d,c)$.

PARA CADA n SEA LA PARAMETRIZACIÓN DEL TRIÁNGULO

$\widehat{b_n d c_n}$

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} 3t c_n + (1-3t) b_n & t \in [0, 1/3] \quad (\gamma_{n,1}) \\ 3(t-1/3) d + (1-3(t-1/3)) c_n & t \in [1/3, 2/3] \quad (\gamma_{n,2}) \\ 3(t-2/3) b_n + (1-3(t-2/3)) d & t \in [2/3, 1] \quad (\gamma_{n,3}) \end{cases}$$

γ_0 ES LA CORRESPONDIENTE PARAMETRIZACIÓN DE $\widehat{bdc}$

$$0 = \int_{\gamma_n} f(z)\,dz = \int_0^{1/3} f(\gamma_{n,1}(t))\, 3(c_n - b_n)\,dt$$

$\gamma_n^* \cap L = \emptyset$

$$+ \int_{1/3}^{2/3} f(\gamma_{n,2}(t))\, 3(d - c_n)\,dt$$

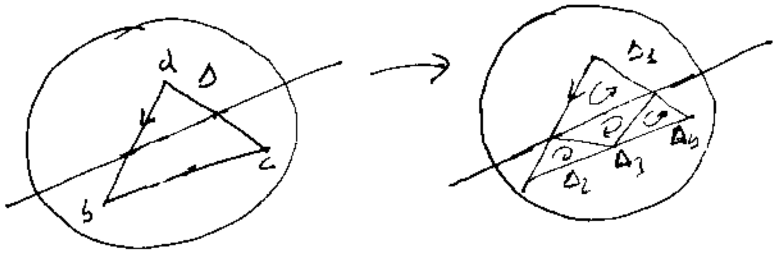
$$+ \int_{2/3}^{1} f(\gamma_{n,3}(t))\, 3(b_n - d)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0$$

YA QUE $\gamma_n(t) \to \gamma_0(t)$ UNIFORMEMENTE (*) EN $[0,1]$ Y f ES CONTINUA EN $D(a,r)$.

(*) $|\gamma_{n,1}(t) - \gamma_{0,1}(t)| = |3t(c_n - c) + (1-3t)(b_n - b)| \le |c_n - c| + |b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
INDEPENDIENTEMENTE DE t

...etc.

4.) SI $\Delta \cap L$ = SEGMENTO



$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f + \int_{\partial\Delta_3} f + \int_{\partial\Delta_4} f =$$

$= 0$ POR LOS DISTINTOS CASOS ANTERIORES,

CON ESTO SE CONCLUYE EL EJERCICIO