PRÁCTICA 3:

NOMBRE Y APELLIDOS ....

1º SEA $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ CON $\text{Re}\, z > 1$ (FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN)

(1₁) PROBAR QUE LA SERIE ANTERIOR CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $\{z : \text{Re}\, z \geq r\}$ $\forall r > 1$

INDICACIÓN
- $n^z = e^{z \lg n}$
- ACOTAR $|n^z|$ Y USAR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS.

$|n^z| = |e^{z \lg n}| = |e^{\text{Re}z \lg n} e^{i \text{Im} z \lg n}| = n^{\text{Re} z} > n^r$

LUEGO $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} < \infty$ YA QUE $r > 1$

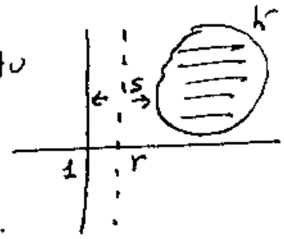
LUEGO POR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $\{z : \text{Re}\, z \geq r\}$ $r > 1$

Y POR TANTO LO HACE ABSOLUTAMENTE EN $\{z : \text{Re}\, z > 1\}$.

(1₂) PROBAR QUE $f \in H(\{z : \text{Re}\, z > 1\})$

INDICACIÓN
USAR EL TEOREMA SIGUIENTE AL DE MORERA.

SEA $K \subseteq \{z : \text{Re}\, z > 1\}$ K COMPACTO



SEA $\delta = \text{dist}(K, \{\text{Re}\, z = 1\}) > 0$

ASÍ $\exists\, r > 1$ CON $K \subseteq \{z : \text{Re}\, z \geq r\}$.

POR TANTO POR (1₁) $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} \longrightarrow f(z)$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE $\{z : \text{Re}\, z > 1\}$. Y COMO $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} \in H(\{z : \text{Re}\, z > 1\})$ $(n^{-z} = e^{-z \lg n})$

SE SIGUE QUE $f \in H(\{z : \text{Re}\, z > 1\})$.

(1₃) PROBAR LA FÓRMULA DE EULER: SI $p_1 p_2 \ldots p_n$ ES LA SUCESIÓN DE NÚMEROS PRIMOS, ENTONCES

$$\frac{1}{f(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right)$$

INDICACIÓN
- $f(z)(1 - 2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^z} = \sum \frac{1}{m^z}$ DONDE m NO ES PAR
- $f(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z}) = \ldots$ etc.

$f(z)(1-2)^{-z}(1-3^{-z}) = \sum_{m \text{ IMPAR}} \frac{1}{m^z} - \sum_{m \text{ IMPAR}} \frac{1}{(3m)^z} \underset{(*)}{=} \sum \frac{1}{\nu^z}$ (*) ES POSIBLE

ν NO ES MULTIPLO DE 2 Ó 3. (*) ES POSIBLE YA QUE LA SERIES INVOLUCRADAS CONVERGEN ABSOLUTAMENTE (POR (1₁)).

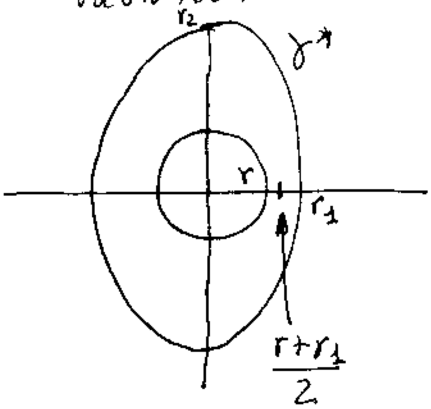
ASÍ $f(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z}) \ldots (1-p_N^{-z}) = \sum r^{-z}$ CON r NATURAL QUE NO ES MULTIPLO DE $2, 3, 5 \ldots p_N$; $\sum r^{-z} = 1 + p_{N+1}^{-z} + \ldots$ ASÍ

$\lim_{N \to \infty} f(z) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-z}) = 1$. ; DESPEJANDO, $f(z) \neq 0$, $\frac{1}{f(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z})$

(Q1.) SEA EL CAMINO CERRADO

$$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longrightarrow \gamma(t) = r_1 \cos t + i r_2 \operatorname{sen} t$$

CON $0 < r < r_1 < r_2$.. PROBAR QUE γ ES HOMOTOPA A LA FRONTERA DE $D(0,r)$, ORIENTADA POSITIVAMENTE



SEA $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(t,s) \longrightarrow s\, r e^{it} + (1-s)(r_1 \cos t + i r_2 \operatorname{sen} t) =$$

$$= \cos t\,(sr + (1-s) r_1) + i \operatorname{sen} t\,(sr + (1-s) r_2).$$

H ES CONTINUA Y

$H(t,0) = \gamma(t)$

$H(t,1) = r e^{it}$

Y $H(0,s) = H(1,s) = sr + (1-s) r_1$.

LUEGO H ES UNA HOMOTOPIA QUE "ENLAZA" γ CON $\partial D(0,r)$.

(Q2..) CALCULAR $\operatorname{Ind}_\gamma(0)$.

SEA $\Omega = \mathbb{C} - D(0, r/2)$ ABIERTO CONEXO CON γ^* Y $\partial D(0,r) \subseteq \Omega$. CON $H([0,1]\times[0,1]) \subseteq \Omega$

ASI COMO SON HOMOTOPAS AMBAS CURVAS

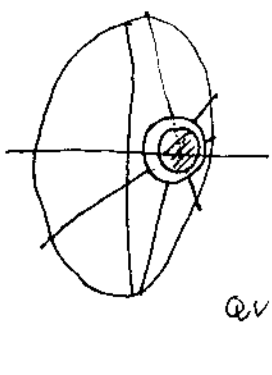
Y $0 \notin \Omega$ $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = \operatorname{Ind}_{\partial D(0,1)}(0) = 1$.

(Q3) CALCULAR $\operatorname{Ind}_\gamma\left(\frac{r+r_1}{2}\right)$

SEA $\Omega' = \mathbb{C} - D\left(\frac{r+r_1}{2}, \frac{r_1 - r}{8}\right)$

$\gamma^* \subseteq \Omega'$ Y $\partial D\left(\frac{r+r_1}{2}, \frac{r_1-r}{4}\right) \subseteq \Omega'$

IDEA
USAR CONVENIENTEMENTE LA IDEA DE (Q1) Y (Q2.)



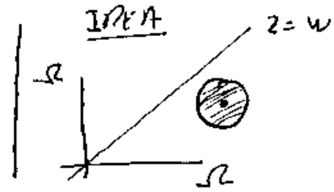
CON $\frac{r+r_1}{2} \notin \Omega'$, Y COMO DE FORMA ANALOGA A (Q1) γ^* Y $\partial D\left(\frac{r+r_1}{2}, \frac{r_1-r}{4}\right)$ SON HOMOTOPOS SIN SALIRNOS DE Ω', SE SIGUE QUE $\operatorname{Ind}_\gamma\left(\frac{r+r_1}{2}\right) = \operatorname{Ind}_{\partial D\left(\frac{r+r_1}{2}, \frac{r_1-r}{4}\right)}\left(\frac{r+r_1}{2}\right) = 1$.

3º VAMOS A DEMOSTRAR EL SIGUIENTE LEMA.

LEMA: "SI $f \in H(\Omega)$, CON Ω ABIERTO CONEXO Y

$$g: \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z,w) \longrightarrow g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{SI } z \neq w \\ f'(z) & \text{SI } z = w \end{cases}$$

ES CONTINUA EN $\Omega \times \Omega$."



3_1. SI $z \neq w$ ¿POR QUÉ g ES CONTINUA? Y CON $\exists\, r>0$ CON $D(z,r), D(w,r) \subseteq \Omega$ Y CON $D(z,r) \cap D(w,r) = \emptyset$; ASÍ

$$g\big|_{D(z,r)\times D(w,r)} (z_0, z_1) = \frac{f(z_0)-f(z_1)}{z-z_1} \quad \text{FUNCIÓN CONTINUA}$$

3_2. SEA $a \in \Omega$, SEA $r>0$ CON $D(a,r) \subseteq \Omega$.
Y SEAN $z, w \in D(a,r)$
¿POR QUÉ $g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 [f'(\gamma(t)) - f'(a)]\,dt$
DONDE $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, $t \in [0,1]$?

IDEA: VER QUE $g(z,w) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\,dt$

$$g(a,a) = f'(a) = \int_0^1 f'(a)\,dt$$

SI $z \neq w$ Y $z, w \in D(a,r)$,

$$\int_0^1 f'(\gamma(t))\,dt = \frac{1}{w-z}\int_0^1 f'(\gamma(t))(w-z)\,dt = \frac{1}{w-z}\int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)\,dt = \underset{\text{REGLA DE BARROW}}{\frac{1}{w-z}}\Big[f\circ\gamma\Big]_0^1 = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \quad g(z,w)$$

SI $z = w$ $\quad g(z,z) = f'(z) = \int_0^1 f'(t)\,dt$.

3_3. ACOTAR $|g(z,w) - g(a,a)|$ PARA QUE LA FUNCIÓN g SEA CONTINUA EN (a,a)

IDEA:
- USAR 3_2.
- ¿POR QUÉ f' ES CONTINUA?

$$|g(z,w) - g(a,a)| \leq \int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(a)|\,dt$$

COMO f ES HOLOMORFA, f' ES CONTINUA Y ASÍ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, r>0$ CON $D(a,r) \subseteq \Omega$ Y SI $z \in D(a,r)$ $\Rightarrow |f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$.

ASÍ PARA $\varepsilon > 0$, SI $(z,w) \in D(a,r) \times D(a,r)$ (COMO $\gamma(t) \in D(a,r)$ $\forall t$ POR SER $D(a,r)$ CONVEXO)

$$|g(z,w) - g(a,a)| \leq \int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(a)|\,dt \leq \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon$$

LUEGO g ES CONTINUA

(4.) VAMOS A PROBAR EL SIGUIENTE TEOREMA

"SEA $f \in H(\Omega)$ CON Ω ABIERTO Y SIMPLEMENTE CONEXO

Y SEA γ UN CAMINO CERRADO CON $\gamma^* \subseteq \Omega$,

ENTONCES $\int_\gamma f(z)dz = 0$ "

DEMOSTRACIÓN:

(4.1) ESTABLECER UNA HOMOTOPÍA ENTRE γ Y ALGÚN PUNTO $z_0 \in \Omega$.

IDEA
RECORDAR LA DEFINICIÓN DE SIMPLEMENTE CONEXO

COMO Ω ES SIMPLEMENTE CONEXO $\exists z_0 \in \Omega$

Y UNA HOMOTOPÍA $H\ [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \Omega$

CON
$$H(s,0) = \gamma(s)$$
$$H(s,1) \equiv \alpha \in \Omega$$

Y $H(0,t) = H(1,t)$ $t \in [0,1]$, CON H CONTINUA

(4.2) DEDUCIR QUE $\forall \alpha \notin \Omega$ $\quad Ind_\gamma(\alpha) = 0$

SEA $\alpha \notin \Omega$, POR SER $H(s,0) = \gamma(s)$ Y $H(s,1) \equiv \alpha$ HOMOTOPAS

IDEA
SI $\gamma_0 \equiv z_0$
VER QUE
$Ind_{\gamma_0}(\alpha) = 0$

$$Ind_\gamma(\alpha) = Ind_{H(\cdot,1)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{H(\cdot,1)} \frac{1}{z-\alpha}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{H'(s,1)}{z_0 - \alpha}ds = 0 \quad \text{YA QUE } H'(s,1) = 0$$

(4.3) CONCLUIR UTILIZANDO EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL.

AHORA COMO $\gamma^* \subseteq \Omega$ Y $\forall \alpha \notin \Omega$, $Ind_\gamma(\alpha) = 0$

PODEMOS APLICAR EL TEOREMA DE CAUCHY-GLOBAL

Y ASÍ $\int_\gamma f(z)dz = 0.$