PRÁCTICA 4:

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

1º SI $f \in H(\Omega - \{p\})$, Ω ABIERTO Y $p \in \Omega$, PROBAR QUE SON EQUIVALENTES

a) $\exists \lim_{z \to p} f(z)$ b) $|f|$ ESTÁ ACOTADA EN UN ENTORNO DE p

INDICACIÓN: EN LA IMPLICACIÓN NO TRIVIAL, USAR $h(z) = (z-p)^2 f(z)$ VIENDO QUE $h \in H(\Omega)$.

a) $\Rightarrow$ b) ES CLARO DE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE; SI $l = \lim_{z \to p} f(z)$ PARA $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall\ 0 < |z-p| < \delta$ $\Rightarrow f(z) \in D(l, 1)$; LUEGO $|f(z)| \leq |l| + 1$ $\forall z \in D(p,\delta) - \{p\}$

b $\Rightarrow$ a) SEA $h(z) = (z-p)^2 f(z)$, $h \in H(\Omega - \{p\})$ EVIDENTEMENTE Y SI $|f|$ ESTÁ ACOTADA EN UN ENTORNO DE p, SE SIGUE QUE

$$\lim_{z \to p} \frac{h(z) - h(p)}{z - p} = \lim_{z \to p} (z-p) f(z) = 0$$

ASÍ, EXISTE $h'(p) = 0$

LUEGO $h \in H(p)$ Y SE PUEDE DESARROLLAR EN SERIE DE TAYLOR ALREDEDOR DE p: $h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n)}(p)}{n!} (z-p)^n$.

$$\text{COMO } f(z) = \frac{h(z)}{(z-p)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n)}(p)}{n!} (z-p)^{n-2} \xrightarrow[z \to p]{} \frac{h''(p)}{2}.$$

2º SEAN $f \in H(\mathbb{C} - \{p\})$, $f \not\equiv 0$ Y $(z_n)_{n=1}^{\infty} \to p$ CON $f(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. HAY QUE DEDUCIR QUE f TIENE UNA SINGULARIDAD ESENCIAL EN p

e_1) DESCARTAR QUE f PUEDA TENER UN POLO EN p

SI f TIENE UN POLO EN $p \Rightarrow \lim_{z \to p} |f|(z) = \infty$, ESTO ES INCOMPATIBLE CON QUE $f(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y $z_n \to p$. LUEGO p NO PUEDE SER UN POLO

e_2) USAR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD PARA DESCARTAR QUE f PUEDA TENER UNA SINGULARIDAD EVITABLE EN p

SI p ES UNA SINGULARIDAD EVITABLE $\Rightarrow \exists \lim_{z \to p} f(z) = f(p)$ Y COMO $z_n \to p \Rightarrow f(z_n) = f(p) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, Y ASÍ $f \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ Y POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD $f \equiv 0$; LLEGAMOS A CONTRADECIR LA HIPÓTESIS.

(e_3) CONCLUIR QUE p ES UNA SINGULARIDAD ESENCIAL ¿PODRÍAS PONER UN EJEMPLO EN ESTAS CONDICIONES?

SI NO EXISTE $\lim_{z\to p} f(z)$, NI $\lim_{z\to p} |f(z)| = \infty$, ENTONCES $f \in H(\Omega - \{p\})$ SOLO PUEDE TENER EN p UNA SINGULARIDAD ESENCIAL.

EJEMPLO $f(z) = \operatorname{sen}\frac{1}{z} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. $f(\frac{1}{2k\pi}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Y $\frac{1}{2k\pi} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$; ADEMÁS $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$.

CLARAMENTE $z=0$ ES UNA SINGULARIDAD ESENCIAL

(3) SI f TIENE UN POLO DE ORDEN m EN a, PROBAR QUE EL RESIDUO DE f EN a VIENE DADO POR

$$Res(f, a) = \lim_{z\to a} g^{(m-1)}(z) \frac{1}{(m-1)!}$$

DONDE $g(z) = (z-a)^m f(z)$

INDICACIÓN: DESARROLLAR g ES SERIE DE TAYLOR.

SI $f \in H(D(a,r) - \{a\})$ Y f SOLO TIENE UN POLO DE ORDEN m EN a, ENTONCES

$g(z) = (z-a)^m f(z) \in H(D(a,r))$ POR LA CARACTERIZACIÓN DE POLO.

ASÍ $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ = DESARROLLO DE TAYLOR DE g

$$= (z-a)^m \Big[\underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}_{\text{DESARROLLO DE LAURENT}} \Big]$$ DE f EN TORNO A a

$$= a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \dots$$

COMO AMBAS SERIES TIENE QUE COINCIDIR

$$a_{-1} = \frac{g^{n-1)}(a)}{(n-1)!} \underset{g^{n-1)} \text{ CONTINUA}}{=} \lim_{z\to a} \frac{g^{n-1)}(z)}{(n-1)!}$$

4º) CALCULAR $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}$

$f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}$ ES PAR, $f(-x) = f(x)$; ASÍ

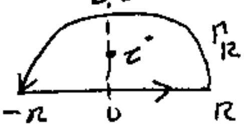
$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$$

SEA $\quad F(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^2+1} = \dfrac{z e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$

F TIENE UN POLO DE ORDEN 1 EN $z = i$

YA QUE $\displaystyle\lim_{z \to i} (z-i) F(z) = \frac{i e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2e} = \operatorname{Res}(F, i)$

SEA Γ_R EL CAMINO



Y $\gamma_R : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\quad t \longrightarrow \gamma_R(t) = R e^{it}$

POR EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} F(z)\,dz = \frac{1}{2e} \Rightarrow \int_{\Gamma_R} F(z)\,dz = \frac{2\pi i}{2e}$$

POR OTRO LADO

$$\int_{\Gamma_R} F(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+1}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{R e^{it} \cdot e^{iRe^{it}}\, iRe^{it}}{R^2 e^{i2t} + 1}\,dt$$

$$\left| \int_0^{\pi} \text{———}\, dt \right| \le \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{-R\operatorname{sen} t}}{|R^2 e^{i2t} + 1|}\,dt \le \frac{R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \le$$

$$\le \frac{R^2}{R^2-1}\,\frac{\pi}{R}\,(1 - e^{-R}) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

↓ INDICACIÓN

ASÍ $\displaystyle\frac{2\pi i}{2e} = \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} F(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + i \operatorname{sen} x)}{x^2+1}\,dx$

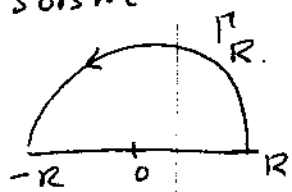
IGUALANDO PARTES IMAGINARIAS $\displaystyle\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$

Y $\displaystyle 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}\,dx$; POR TANTO

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$$

IDEA

- OBSERVA QUE $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}$ ES PAR
- CONSIDERAR $F(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^2+1}$
- USAR EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS SOBRE



- USAR QUE $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \le$ $\le \dfrac{\pi}{R}(1 - e^{-R})$, R>0

5º) SEA f UNA FUNCIÓN MEROMORFA EN Ω ABIERTO Y SEA $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$, DE MODO QUE $\gamma^* = \partial D(a,r)$ NO CONTIENE NI CEROS NI POLOS DE f

INDICACIÓN: TOMAS $g(z)=f(z)-1$ Y USAR EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

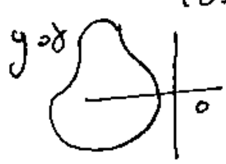
5.1) SI $|f(z)|<1$ $\forall z \in \gamma^*$, PROBAR QUE EL NÚMERO DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $f(z)=1$ EN $D(a,r)$ ES EL MISMO QUE EL NÚMERO DE POLOS DE f EN $D(a,r)$

SEA $g(z)=f(z)-1$ LOS CEROS DE g COINCIDEN CON LAS SOLUCIONES DE $f(z)=1$ EN $D(a,r)$

POR OTRO LADO LOS POLOS DE g Y f SON LOS MISMOS

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{g\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0).$$

COMO $|f(z)|<1$ $\forall z\in\gamma^* \Rightarrow \mathrm{Re}(g\circ\gamma(t)) = \mathrm{Re}(f(z)-1)<0$ $\forall z \in \gamma^*$

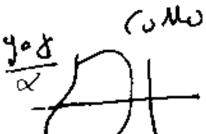


Y ASÍ $\mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)=0$, YA QUE 0 ESTÁ EN LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE $\mathbb{C}\setminus(g\circ\gamma)^*$. ASÍ EL NÚMERO DE CEROS Y POLOS DE g EN $D(a,r)$ SON LOS MISMOS.

5.2) SI $|f(z)|<1$ $\forall z\in\gamma^*$, PROBAR QUE LAS SOLUCIONES DE $f(z)=\alpha$, $|\alpha|\geq 1$, ES IGUAL A LOS POLOS DE f EN $D(a,r)$

COMO ANTES SE TOMA $g(z)=f(z)-\alpha$, LOS CEROS DE g SON LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN Y LOS POLOS DE g SON LOS MISMOS QUE LOS DE f. SOLO HAY QUE VER QUE $\mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)=0$.

COMO $f(z)-\alpha = \alpha\left(\frac{f(z)}{\alpha}-1\right)$ Y $\left|\frac{f(z)}{\alpha}\right|<1$ $\forall z\in\gamma^* \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{\alpha}-1\right)<0$



ASÍ $\mathrm{Ind}_{\frac{g\circ\gamma}{\alpha}}(0)=0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{g\circ\gamma}{\alpha}} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{g\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$.

5.3) SI $|f(z)|>1$ $\forall z\in\gamma^*$, PROBAR QUE LAS SOLUCIONES DE $f(z)=\alpha$, $|\alpha|\leq 1$, ES IGUAL A LOS CEROS DE f EN $D(a,r)$

INDICACIÓN: TOMAR $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ Y LA ECUACIÓN $g(z)=\frac{1}{\alpha}$.

SEA $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ ASÍ LOS CEROS Y POLOS DE f Y g SE INTERCAMBIAN

$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|}<1$ $\forall z\in\gamma^*$; SEA $g(z)=\frac{1}{\alpha}$, $\left|\frac{1}{\alpha}\right|\geq 1$,

LUEGO POR 5.2) LAS SOLUCIONES DE $g(z)=1/\alpha$ SON EN NÚMERO IGUALES A LOS POLOS DE g EN $D(a,r)$, QUE SON ESTOS ÚLTIMOS LOS CEROS DE f EN $D(a,r)$.