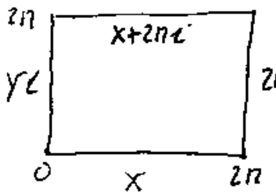
PRÁCTICA 5ª

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

1. CALCULAR $\max\{|e^{z}| : z \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]\}$.

INDICACIÓN: TENER EN CUENTA EL PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO

$e^{z} \in H(\mathbb{C})$, COMO $(0,2\pi)\times(0,2\pi)$ ES ABIERTO EN $\mathbb{C}$, EL PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO NOS DICE QUE $|e^{z}|$ ALCANZA SU MÁXIMO EN LA FRONTERA



ASÍ

SI $x \in [0,2\pi]$, e^{x} ES MÁXIMO EN $x=2\pi$

SI $y \in [0,2\pi]$, $|e^{2\pi+iy}| = e^{2\pi}$ EL MÁXIMO SE ALCANZA PARA TODO $y \in [0,2\pi]$

SI $x \in [0,2\pi]$, $|e^{x+2\pi i}| = e^{x}$ EL MÁXIMO SE ALCANZA PARA $x=2\pi$

SI $y \in [0,2\pi]$, $|e^{yi}| = 1 < 2\pi$. ASÍ EN $\{2\pi\}\times[0,2\pi]$ SE TIENE UNA FAMILIA DE MÁXIMOS.

2. SI $m, n \in \mathbb{N}$ Y $P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$, PROBAR QUE LA ECUACIÓN $P(z)=0$ TIENE EXACTAMENTE n CEROS EN EL DISCO $D(0,1)$

INDICACIÓN: TENER EN CUENTA EL TEOREMA DE ROUCHE.

$$|P(z) - 3z^n| = \left|1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^m}{m!}\right| <$$

$$< 1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \cdots + \frac{|z|^m}{m!} < e < 3 = |3z^n|$$

SI $|z|=1$.

POR EL TEOREMA DE ROUCHE, $P(z)$ Y $3z^n$ TIENEN EL MISMO NÚMERO DE CEROS EN $D(0,1)$

COMO $3z^n=0$ TIENE A $z=0$ COMO RAÍZ DE ORDEN n Y NO MÁS, POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

ASÍ $P(z)=0$ TIENE n RAÍCES EN $D(0,1)$.

③₁ SEA UNA SUCESIÓN $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y CONEXO TAL QUE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω. SI $z_0 \in \Omega$ ES UN CERO DE ORDEN N DE f, PROBAR QUE EXISTEN $\delta > 0$ Y $n_0 \in \mathbb{N}$ TAL QUE $\forall n \geq n_0$ LA FUNCIÓN f_n TIENE EXACTAMENTE N CEROS EN EL DISCO $D(z_0, \delta)$.

INDICACIÓN: TENER EN CUENTA LA PRUEBA DEL TEOREMA DE HURWITZ

COMO $f \in H(\Omega)$, f ES CONTINUA EN z_0
ASÍ $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall z \in \overline{D(z_0,\delta)}$ $|f(z)| \neq 0$
SEA z_1 TAL QUE $|f(z_1)| = \max\{|f(z)| : \forall z \in \partial\overline{D(z_0,\delta)}\}$
ESTE COMPLEJO EXISTE YA QUE $|f|$ ES CONTINUA Y $\partial\overline{D(z_0,\delta)}$ ES COMPACTO. SEA $\varepsilon = \frac{|f(z_1)|}{2}$, $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon = \frac{|f(z_1)|}{2} \leq |f(z)| \quad \forall z \in \partial\overline{D(z_0,\delta)}$$

(YA QUE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SOBRE COMPACTOS), APLICANDO EL TEOREMA DE ROUCHÉ, f TIENE N CEROS EN $D(z_0,\delta)$ (z_0 DE ORDEN N), LUEGO $\forall n \geq n_0$ f_n TIENE N CEROS TAMBIÉN EN $D(z_0,\delta)$.

③₂ CON LA NOTACIÓN ANTERIOR, SI $z_n \in D(z_0,\delta)$ Y $f_n(z_n) = 0$ $n \geq n_0$, PROBAR QUE $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$.

SI $z_n \not\to z_0$ Y COMO $\overline{D(z_0,\delta)}$ ES COMPACTO
$\Rightarrow \exists z_{n_j} \to z' \in \overline{D(z_0,\delta)} \setminus \{z_0\}$.
POR SER $\overline{D(z_0,\delta)}$ COMPACTO, $f_{n_j} \to f$ UNIFORMEMENTE EN $\overline{D(z_0,\delta)}$ Y ASÍ $f_{n_j}(z_{n_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(z')$
Y COMO $f_{n_j}(z_{n_j}) = 0$ $\forall j = 1 \dots n$, SE SIGUE QUE $f(z') = 0$.
AHORA BIEN EN $\overline{D(z_0,\delta)}$, f SOLO TIENE A z_0 POR RAÍZ; LLEGAMOS PUES A CONTRADICCIÓN

(4.) SEAN W Y Ω ABIERTOS CONEXOS DE $\mathbb{C}$, DE MODO QUE $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ES ARMÓNICA EN Ω Y $f : W \longrightarrow \Omega$ ES HOLOMORFA EN W. VAMOS A VER QUE $R = S \circ f \; W \longrightarrow \mathbb{R}$ ES ARMÓNICA EN W

(4_1.) SI $f = u + vi$, $R(x,y) = S(u(x,y), v(x,y))$.

CALCULAR $\frac{\partial R}{\partial x}$ Y $\frac{\partial R}{\partial y}$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

(4_2.) CALCULAR $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ Y $\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x}\right] \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right] \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y}\right] \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

(4_3.) CALCULAR $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} =$

$$= \frac{\partial S}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial S}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] =$$

IDEA

.) AGRUPAR TÉRMINOS.

..) CONSIDERAR QUE $\Delta S = 0$

...) CONSIDERAR QUE u Y v SATISFACEN LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \Delta u = \Delta v = 0 \\ \text{Y COMO } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}}}{=} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] \underset{\substack{\downarrow \\ \Delta S = 0}}{=} 0.$$

5º PROBAR EL PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO PARA FUNCIONES ARMÓNICAS:

SI $u : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ ES ARMÓNICA SOBRE Ω UN ABIERTO Y CONEXO DE $\mathbb{C}$, ENTONCES SI EXISTE $a \in \Omega$ CON $u(a) = \max\{u(z) : z \in \Omega\}$ LA FUNCIÓN u ES CONSTANTE

IDEA

USAR LA PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS, EN ESTE CASO SOBRE u TOMANDO "a" EL SUPUESTO MÁXIMO

- CONSIDERAR DOS CASOS.

.) $u(a) = u(a+se^{it})$ $\forall t \in [0, 2\pi]$

..) O BIEN $u(a) - u(a+se^{it}) \geq 0$ $t \in [0, 2\pi]$ FUNCIÓN NO NULA.

SI SUPONEMOS QUE $\exists a \in \Omega$ CON

$$u(a) = \max\{u(z) : z \in \Omega\}.$$

SEA $r > 0$ CON $D(a, r) \subseteq \Omega$ Y PARA $0 < s < r$ SE TIENE DE LA PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO QUE

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+se^{it})\,dt \quad (*)$$

SI $u(a+se^{it}) = u(a)$ $\forall t \in [0, 2\pi]$ Y $\forall s < r$ SE SIGUE QUE $u \equiv ct$ EN $D(a, r)$. SI NO ES ASÍ $\exists s \in (0, r)$ CON

$$u(a) - u(a+se^{it}) \geq 0 \text{ Y NO NULA.}$$

COMO $u(a) - u(a+se^{it})$ ES CONTINUA EN t

$$0 < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a) - u(a+se^{it})\,dt = u(a) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+se^{it})\,dt =$$

$$\underset{(*)}{=} u(a) - u(a) = 0$$

LO QUE NOS LLEVA A CONTRADICCIÓN.