PRÁCTICA 6ª

NOMBRE Y APELLIDOS ....

(1) RESOLVER EL PROBLEMA DE DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial D(0,1)}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) = \cos^2\theta \end{cases}$$

(1₁) PLANTEAR LA INTEGRAL DE POISSON

LA SOLUCIÓN DE (1) SERÁ

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)}\cdot\cos^2 t\, dt.$$

(1₂) ¿SE PUEDE RESOLVER FACILMENTE LA INTEGRAL ANTERIOR?

TENEMOS UNA FUNCIÓN RACIONAL EN $\cos t$ Y $\operatorname{sen} t$ Y QUIZAS UN CAMBIO DE VARIABLE DEL TIPO $u = \operatorname{tg} t/2$ PODRÍA RESOLVER LA INTEGRAL

(1₃) ENCONTRAR $f \in H(\mathbb{C})$ TAL QUE $\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \cos^2\theta$

COMO $(e^{i\theta})^2 = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^2 = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i\cos\theta\operatorname{sen}\theta =$

$= 2\cos^2\theta - 1 + 2i\cos\theta\operatorname{sen}\theta$, ASÍ

IDEA
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$f(z) = \frac{z^2}{2} + 1/2 \in H(\mathbb{C})$ Y $\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) =$

$$= \left(\frac{2\cos^2\theta - 1}{2}\right) + 1/2 = \cos^2\theta.$$

(1₄) ¿CUAL ES LA SOLUCIÓN DE (1)?

COMO $\operatorname{Re} f$ ES ARMÓNICA EN TODO $\mathbb{R}^2$ Y $\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \cos^2\theta$, LA SOLUCIÓN DE (1) SERÁ $\operatorname{Re} f$.

IDEA
LA PARTE REAL DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA ES ARMÓNICA.

$$f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y) = \frac{(x+iy)^2}{2} + 1/2 =$$

$$= \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{2} + 1/2 \quad \text{ASÍ} \quad \operatorname{Re} f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + 1/2.$$

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

② PROBAR QUE $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx \, e^{-ny}}{n^2}$

ES ARMÓNICA EN $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

IDEA

USAR LA PRUEBA DE M-WEIERSTRASS Y EL TEOREMA DE HARNACK.

SI $u_n(x,y) = \frac{\operatorname{sen} nx \, e^{-ny}}{n^2}$; $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} nx \, e^{-ny}$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = \operatorname{sen} nx \, e^{-ny}$$

LUEGO $\sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen} nx \, e^{-ny}}{n^2}$ ES ARMÓNICA $\forall N \in \mathbb{N}$

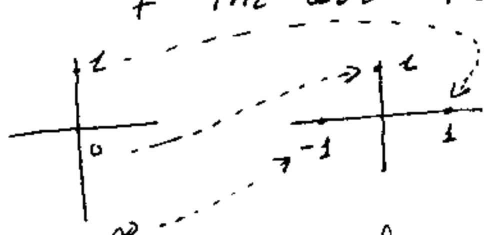
AHORA $|u_n(x,y)| = \frac{|\operatorname{sen} nx \, e^{-ny}|}{n^2} \underset{y>0}{\le} \frac{1}{n^2} \quad \forall (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ES CONVERGENTE, LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE $\sum_{n=1}^{N} u_n(x,y) \longrightarrow u(x,y)$ UNIFORMEMENTE SOBRE TODO K COMPACTO DE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. ESTAMOS EN LAS HIPÓTESIS DEL TEOREMA DE HARNACK Y POR TANTO u ES ARMÓNICA EN $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

③₁ ENCONTRAR UNA TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS f TAL QUE $f(0) = i$, $f(i) = 1$ Y $f(\infty) = -1$

IDEA

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ENCONTRAR a, b, c Y d.



$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$f(0) = \frac{b}{d} = i \Rightarrow b = id.$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c \text{ Y } a \neq 0$$

$$\text{Y} \quad f(i) = \frac{ai + id}{-a+d} = 1 \Rightarrow a = \frac{(1-i)}{i+1} d.$$

SI TOMA $a = 1$, $c = -1$, $d = \frac{i+1}{1-i}$ Y $b = \frac{i-1}{1-i} = -1$

$$\text{ASÍ} \quad f(z) = \frac{z-1}{-z + \frac{i+1}{1-i}}$$

③₂ ¿CÓMO ES $f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\})$?

LA RECTA $x=0$ SE TRANSFORMA POR f EN LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR LOS PUNTOS $-1, i$ Y 1 ES DECIR EN $\partial D(0,1)$. COMO $f(1) = 0$, EL CONEXO $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ SE TRANSFORMA EN $D(0,1)$

IDEA

- f TRANSFORMA RECTAS EN RECTAS O CIRCUNFERENCIAS
- f ES CONTINUA Y LLEVA CONEXOS EN CONEXOS.

(4º) VAMOS A PROBAR QUE DADA $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ BIYECTIVA CON $f \in H(\mathbb{C})$, ENTONCES $f(z) = az + b$

(4.1º) PROBAR QUE SI $f \in H(\mathbb{C})$ Y f BIYECTIVA, ENTONCES $\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$

IDEA
CONSIDERAR $g(z) = f(\frac{1}{z})$
SI g TIENE EN $z=0$ UNA DISCONTINUIDAD ESENCIAL, USAR ADECUADAMENTE EL TEOREMA DE CASORATI-WEIERSTRASS PARA LLEGAR A CONTRADICCIÓN

SEA $g(z) = f(\frac{1}{z})$, g $\mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}-\{f(0)\}$ $g \in H(\mathbb{C}-\{0\})$ Y BIYECTIVA
SI $z=0$ ES UN POLO PARA g HEMOS TERMINADO. SI g TIENE UNA DISCONTINUIDAD EVITABLE EN $z=0$, POR EL TEOREMA DE LIOUVILLE f ES CONSTANTE, LO CUAL NO ES POSIBLE.
SI $z=0$ ES UNA DISCONTINUIDAD ESENCIAL (VEAMOS QUE NO ES POSIBLE) SEA $z_0 \neq 0$ Y ε CON $D(z_0,\varepsilon) \cap D(0,\varepsilon)$. POR EL TEOREMA DE CASORATI-WEIERSTRASS $\exists z_n \in D(0,\varepsilon)-\{0\}$ CON $g(z_n) \to g(z_0)$, POR UN TEOREMA ANTERIOR $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall g(z_n) \in D(g(z_0), \delta)$ $\exists w_n \in D(z_0, \varepsilon)$ CON $g(w_n) = g(z_n)$.
LO QUE CONTRADICE LA INYECTIVIDAD DE g.

(4.2º) PROBAR QUE SI $f \in H(\mathbb{C})$ Y $\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$, ENTONCES $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$

IDEA
VER QUE $g(z) = f(\frac{1}{z})$ TIENE UN POLO DE ORDEN n EN $z=0$

SEA $g(z) = f(\frac{1}{z})$; COMO $|g(z)| = |f(\frac{1}{z})| \xrightarrow[z \to 0]{} \infty$ SE SIGUE QUE g TIENE UN POLO EN $z=0$, QUE TENDRÁ UN CIERTO ORDEN n, ASÍ

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k} + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \text{ COMO}$$

$f(z) = g(\frac{1}{z}) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}$ Y COMO f ES DERIVABLE EN $z=0$ $\Rightarrow b_k = 0$ $\forall k \geq 1$, POR LA CARACTERIZACIÓN DE DESIGUALDADES.

(4.3º) CONCLUIR USANDO (4.1º) Y (4.2º)

IDEA
¿ $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ES INYECTIVA EN $\mathbb{C}$? USAR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ TIENE n SOLUCIONES, POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA; COMO f ES INYECTIVA, ESTAS RAÍCES SERÁN IGUALES, ASÍ $f(z) = a_n (z-a)^n$.
SEA $D(a,r)$ DISCO TAL QUE $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = a$. POR UN RESULTADO ANTERIOR $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall w \in D(f(a), \delta)$ LA ECUACIÓN $f(z) = w$ TIENE n SOLUCIONES DISTINTAS. DE NUEVO COMO f ES INYECTIVA NO QUEDA MÁS REMEDIO QUE $n=1$
ASÍ $f(z) = a_1 z + a_0$.

(S°) SEA $g: \mathbb{C}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$

$$z \longrightarrow g(z) = \frac{1}{\bar z}, \quad g(0)=\infty.$$

g SE LLAMA INVERSIÓN GEOMÉTRICA RESPECTO DE LA CIRCUNFERENCIA $\partial D(0,1)$

(S1) PROBAR QUE $g(z) = \frac{z}{|z|^2}$

$$g(z) = \frac{1}{\bar z} = \frac{1}{\bar z}\cdot\frac{z}{z} = \frac{z}{|z|^2}$$

(S2) PROBAR QUE $\forall\, z \in \partial D(0,1)$ $\quad g(z) = z$.

SI $z \in \partial D(0,1)$, $|z|^2 = 1$, ASÍ $g(z) = \frac{z}{|z|^2} = z$.

(S3) SEA LA RECTA VECTORIAL $R: z = ta \quad t \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{C}$ FIJO.

PROBAR QUE $g(R) = R$.

$g(at) = \frac{1}{t\bar a} = \frac{1}{t}\frac{1}{|a|^2}\, a \in \mathbb{R}$. ; SI sa ES UN PUNTO DE R

$\frac{1}{t}\frac{1}{|a|^2} = s \Rightarrow t = \frac{1}{s}\frac{1}{|a|^2}$ ASÍ PARA ESTE "t" $g(at) = sa$.

(S4) PROBAR QUE $g(\partial D(0,r)) = \partial D(0,1/r) \quad r>0$.

$z \in \partial D(0,r) \iff |z| = r$ AHORA $g(z) = \frac{z}{|z|^2}$ Y

$$|g(z)| = \left|\frac{z}{|z|^2}\right| = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r} \Rightarrow g(z) \in \partial D(0, 1/r)$$

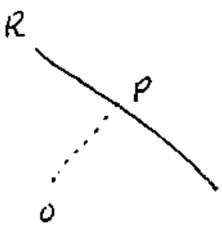
(S5) SEA R UNA RECTA QUE NO PASA POR EL ORIGEN Y SEA $P \in R$ CON $\min\{dis(0,Q) : Q \in R\} = dis(0,P)$

ENTONCES $g(R) = \partial D\left(\frac{1}{2|P|^2}P, \frac{1}{2|P|}\right)$.

IDEA

¿$\left|g(z) - \frac{1}{2|P|^2}P\right| = ..$ $z \in R$?

USAR QUE R ES CONEXO. Y QUE $R \equiv \langle z,P\rangle - |P|^2 = 0$ ¿POR QUÉ?



$\exists\, P \in R$ CON $dis(0,P) = dis(0,R)$ YA QUE $\{0\}$ ES COMPACTO Y R CERRADO; ADEMÁS EL VECTOR OP, P ES ORTOGONAL A R

ASÍ $R \equiv \langle z,P\rangle - |P|^2 = 0$.

AHORA $\left|g(z) - \frac{1}{2|P|^2}P\right|^2 = \left\langle \frac{z}{|z|^2} - \frac{1}{2|P|^2}P, \frac{z}{|z|^2} - \frac{1}{2|P|^2}P \right\rangle =$

$$= \frac{1}{|z|^2} - 2\frac{1}{2|P|^2}\frac{1}{|z|^2}\langle z,P\rangle + \frac{1}{4P^2} \underset{\downarrow}{=}$$

$\langle z,P\rangle = |P|^2$ YA QUE $z \in R$.

$$= \frac{1}{|z|^2} - 2\frac{1}{2|P|^2}\cdot\frac{1}{|z|^2}|P|^2 + \frac{1}{4|P|^2} = \left(\frac{1}{2|P|}\right)^2$$

LUEGO $g(R) \underset{(*)}{\subseteq} \partial D\left(\frac{1}{2|P|^2}P, \frac{1}{2|P|}\right)$. TENIENDO EN CUENTA QUE $g(\infty) = 0$ Y $0 \in \partial D\left(\frac{1}{2|P|^2}P, \frac{1}{2|P|}\right)$, LA IGUALDAD EN $(*)$ SE OBTIENE POR CONEXIÓN; R ES CONEXO LUEGO, $g(R)$ TIENE QUE SER CONEXO.