AVR PRÁCTICA-21-2

Nombre y apellidos...

1.-¿Cuál de las siguientes series de funciones converge uniformemente en el intervalo $[50, 72]$?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+1}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx-1}{2+\operatorname{sen} n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n}{n!}$

a) Criterio del cociente: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}x = x$

$x>0$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+1}{n^2}$

Así si $x>1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ diverge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+1}{n^2}$ diverge.

b) $\displaystyle\frac{nx-1}{2+\operatorname{sen} x}\underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, la serie no es convergente.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ si $x>2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^n>1$, así $\frac{x^n}{2^n}\not\to 0$ si $n>1$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n}{n!}$ Prueba M-Weierstrass.

$$\left|\frac{x+n}{n!}\right| \le \frac{72+n}{n!} \quad \forall x\in[50,72].$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{72+n}{n!}$ es convergente (por el criterio del cociente) llegamos a que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n}{n!}$ converge uniformemente en $[0,72]$ en particular en $[50,72]$

2.- Comprueba que la función $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$, para $x\in\mathbb{R}$, tiene derivada continua.

$\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right| < \frac{1}{n^3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\sum\frac{1}{n^3}<\infty$, por la prueba M-Weierstrass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

$\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right)' = \frac{n\cos nx}{n^3} = \frac{\cos nx}{n^2}$

De nuevo por la prueba M-Weierstrass $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ la serie de derivadas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniformemente a una función que es f'. Como cada $\frac{\cos nx}{n^2}$ es continua en $\mathbb{R}$, la convergencia uniforme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ a f' implica que f' también es continua.

3.- Encuentra los intervalos de convergencia de las siguientes series de potencias. Determinar la convergencia en los extremos.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n!}$

a) Criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{|x|^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}|x| = |x| \begin{cases} <1 & \text{convergente} \\ >1 & \text{divergente} \end{cases}$

tanto para $x=1$ ó $x=-1$ la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergen

Intervalo de convergencia $[-1,1]$

b) Criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}x^{(n+1)!}}{2^n x^{n!}} = \lim_{n\to\infty} 2x^{n!(n+1-1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|<1 \\ 2 & \text{si } |x|=1 \\ \infty & \text{si } |x|>1 \end{cases}$

Luego el intervalo de convergencia es

$(-1,1)$

4.- ¿Cuál de las siguientes funciones **no** es continua en $x=2$?

a) $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$ b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$

c) $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|t-2|}}dt$ d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{n}$.

a) $\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}$ es continua en $\mathbb{R}$ por tanto $f(x)$!

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$ serie de potencias, por el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^n}{(n+1)!}}{\frac{|x|^{n-1}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)}|x| = 0$. El radio de convergencia es infinito, converge en todo $\mathbb{R}$, y por tanto f uniformemente en $[-M,M)$ $\forall M>0$, y por tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ (por la conservación de la continuidad por la convergencia uniforme).

c) Las integrales impropias $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-t}}dt$ y $\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t-2}}dt$ ambas existen, por lo que f es continua en $x=2$.

d) Serie de potencias centrada en $x=3$ $\frac{(3-x)^n}{n} = \frac{(-1)^n(x-3)^n}{n}$.

Usando el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|3-x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|3-x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|3-x| = |3-x|$

El radio de convergencia lo tendremos para $|3-x|<1$ $\iff x \in (2,4)$.

Para $x=2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ no es convergente.

Luego la f de d) no es continua en $x=2$.