EXAMEN DE 2º PARCIAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m1).

18 de Mayo de 2026.

1.- (1 punto). Se considera la función $F(t) = \int_0^1 te^{-x^2}dx$ para $t \in \mathbb{R}$.

a) ¿F es continua en todo $\mathbb{R}$?

b) ¿F es uniformemente continua en $\mathbb{R}$?

2.- (**Teoría**, 1 punto). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo $[a, b]$. Si $f(a) = f(b)$ y f' es decreciente en $[a, b]$, prueba que $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in [a, b]$.

3.- (1 punto). Representa la gráfica de la función $f(x) = x\ln(x^2) - x^2$. Indicando zonas de crecimiento, extremos relativos, zonas de convexidad...etc

4.- (1 punto). Calcula $\displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{1-u}} du.$

5.- (1 punto). Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^{\frac{1}{2}})\, dt}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)}.$

6.- (1 punto). ¿Existe la integral $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{-\ln(1-x)}}dx$?

7.- (**Teoría**, 1 punto). Prueba que $\displaystyle\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8.- (1 punto). Se considera la serie de funciones $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan kx}{1+x^k}$ para $x > 1$.

a) ¿Converge la serie uniformemente en $[a, \infty)$ para $a > 1$?

b) ¿Converge la serie uniformemente en $(1, \infty)$?

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: Lunes 25 de Mayo a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN

PROBLEMA 1: $F(t) = \int_0^1 t\, e^{-x^2} dx \quad t \in \mathbb{R}.$

OBSERVEMOS QUE $F(t) = t \int_0^1 e^{-x^2} dx.$

LUEGO $|F(t) - F(s)| = \left| t \int_0^1 e^{-x^2} dx - s \int_0^1 e^{-x^2} dx \right| =$

$= |t-s| \int_0^1 e^{-x^2} dx$

$g(x) = e^{-x^2}$ ES CONTINUA EN $[0,1]$, LUEGO EXISTE

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = k > 0 \quad (e^{-x^2} > 0 \quad \forall x)$$

NOTACIÓN

HEMOS VISTO QUE F ES LIPSCHITZIANA, E.D $\exists k > 0$ TAL QUE $|F(t) - F(s)| \leq k |t-s|.$

VEAMOS QUE ESTA PROPIEDAD NOS ASEGURA QUE F ES UNIFORMEMENTE CONTINUA Y POR TANTO CONTINUA.

SEA $\varepsilon > 0$ SEA $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, LUEGO SI $|t-s| < \delta$

ENTONCES $|F(t) - F(s)| = k|t-s| \leq k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$

— o —

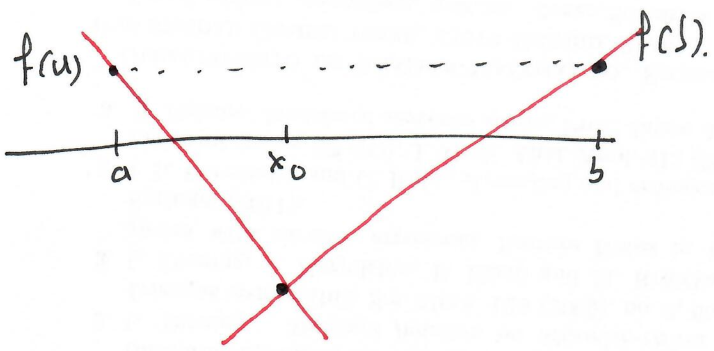
OBSERVACIÓN: POR SER e^{-x^2} CONTINUA Y POR TANTO INTEGRABLE EN $[0,1]$, $F(t) = tk$, ES LA ECUACIÓN DE UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN Y CLARAMENTE UNA FUNCIÓN CONTINUA. EL CÁLCULO DE ARRIBA SIRVE PARA VER QUE ES UNIFORMEMENTE CONTINUA.

EXAMEN

PROBLEMA 2:] (TEORÍA) VEAMOS LA PRUEBA POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

SUPONGAMOS QUE EXISTE $x_0 \in (a,b)$ TAL QUE

$$f(x_0) < f(a) = f(b)$$



SI APLICAMOS EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO A f EN $[a,x_0]$ EXISTE $x_1 \in (a, x_0)$ TAL QUE $f'(x_1) = \dfrac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < 0$

YA QUE $f(x_0) - f(a) < 0$ Y $x_0 - a > 0$.

SI APLICAMOS EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO A f EN $[x_0, b]$ EXISTE $x_2 \in (x_0, b)$ TAL QUE

$$f'(x_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0$$

YA QUE $f(b) - f(x_0) > 0$ Y $b - x_0 > 0$

LLEGAMOS A QUE $x_1 < x_2$ Y $f'(x_2) > f'(x_1)$

LO QUE CONTRADICE QUE f' SEA DECRECIENTE

EXAMEN

PROBLEMA 3: $f(x) = x \ln x^2 - x^2.$

- $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, en principio ya que para $x=0$ no está definido $\ln x$.

- Límites: •) $\lim_{x\to 0} x\ln x^2 - x^2 = \lim_{x\to 0} x \ln x^2 - \lim_{x\to 0} x^2$
$= \lim_{x\to 0} x \ln x^2$ luego existe el primer límite si y sólo si existe el último.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -2x = 0.$$

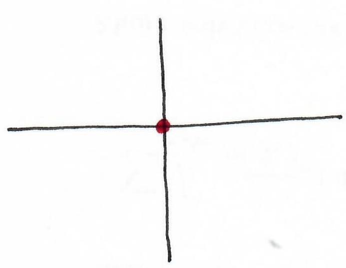
Como existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, podemos considerar $f(0)=0$ y así $\boxed{Dom f = \mathbb{R}}$

••) $\lim_{x\to -\infty} x\ln x^2 - x^2 = -\infty$

•••) $\lim_{x\to \infty} x\ln x^2 - x^2 = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\ln x^2}{x} - 1\right) = -\infty$

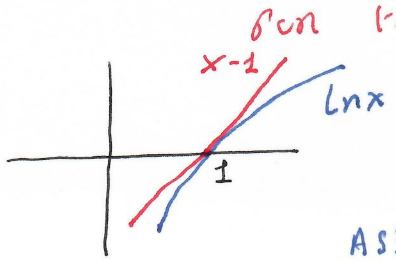
ya que $x^2 \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ y $\frac{\ln x^2}{x} - 1 \xrightarrow[x\to\infty]{} -1$ dado que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = 0.$$



- Derivada $f'(x) = \ln x^2 + \frac{2x^2}{x^2} - 2x =$
$= \ln x^2 + 2 - 2x =$
$= 2(\ln x - (x-1))$

Observemos que $x-1$ es la tangente a $\ln x$ por el punto $(1,0)$



Como $\ln x$ es cóncava se tiene que $x-1 \geq \ln x$ $\forall x \in (0,\infty)$.

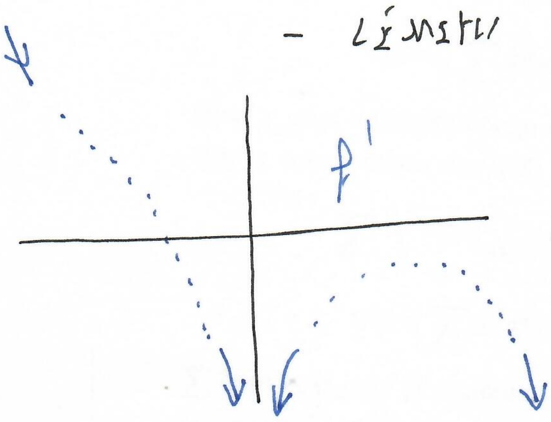
Así $f'(x) \leq 0$ $\forall x > 0$.

- Sabemos que f es decreciente en $(0,\infty)$.

Para estudiar el signo de f' vamos a representar f'.

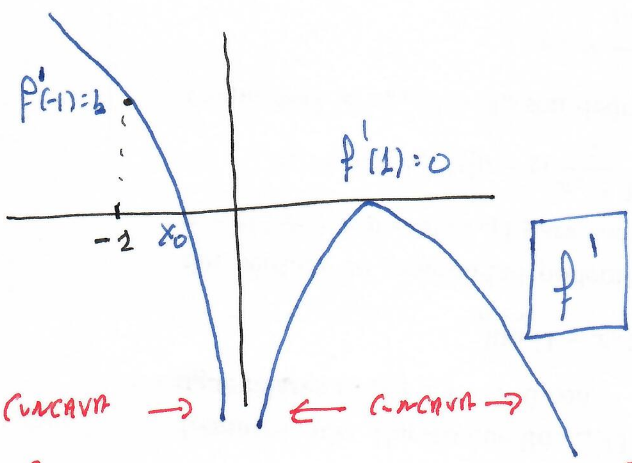
- Dom $f' = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Límites
  - $\lim_{x\to 0} \ln x^2 + 2 - 2x = -\infty$
  - $\lim_{x\to -\infty} \ln x^2 + 2 - 2x = \infty$
  - $\lim_{x\to \infty} \ln x^2 + 2 - 2x = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\ln x^2}{x} + \frac{2}{x} - 2\right) = -\infty$



- Derivada $f''(x) = \frac{2x}{x^2} - 2 = \frac{2}{x} - 2$

Así $f''(x) \begin{cases} <0 & \text{si } x<0 \Rightarrow f' \text{ decreciente y } f \text{ cóncava} \\ >0 & \text{si } x\in(0,1) \Rightarrow f' \text{ creciente y } f \text{ convexa} \\ =0 & \text{si } x=1 \Rightarrow x=1 \text{ máximo de } f' \text{ y punto de inflexión de } f \\ <0 & \text{si } x>1 \Rightarrow f' \text{ decreciente y } f \text{ cóncava} \end{cases}$

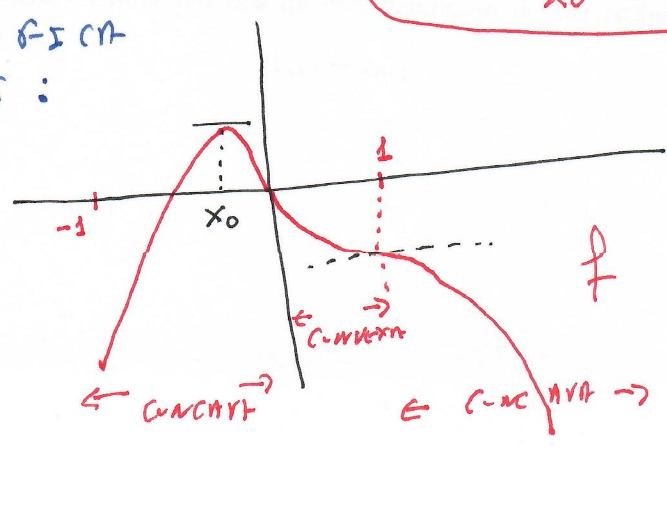


$f''' = -\frac{2}{x^2}$

Observemos que $\exists\, x_0 < 0$, $x_0 \in (-1,0)$ tal que $f'(x_0) = 0$ (ya que $f'(-1) = 4$ y $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$). Único punto de $(-\infty, 0)$ donde se anula $f'(x)$. Aquí en x_0 f tiene un máximo.

- Como $f(0) = 0$ y $\begin{cases} f \text{ crece en } x < x_0 \\ f \text{ decrece en } x \in (x_0, 0). \end{cases}$ x_0 máximo local

Así la gráfica buscada es:



f decrece en (x_0,∞)

f crece en $(-\infty, x_0)$

$x = x_0$ máximo

$f(0) = 0$

$x = 1$ punto de inflexión.

EXAMEN.

PROBLEMA 4:) $\displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{1-u}}\,du$

HACEMOS EL CAMBIO DE VARIABLE $x=\sqrt{1-u}$.

ASÍ $dx = -\frac{1}{2\sqrt{1-u}}\,du$ y $1-x^2=u$

LUEGO $\displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{1-u}}\,du = -2\int -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u}}\,u\,du =$

$\displaystyle = -2\int (1-x^2)\,dx = -2\left(x-\frac{x^3}{3}\right) =$

$= -2x+\frac{2}{3}x^3 = -2\sqrt{1-u} + 2/3\,(1-u)^{3/2}$

$x=\sqrt{1-u}$.

COMPROBACIÓN: $\left[-2\sqrt{1-u}+2/3\,(1-u)^{3/2}\right]' =$

$= \frac{2}{2\sqrt{1-u}} - \frac{2}{3}\frac{3}{2}(1-u)^{3/2-1} = \frac{1}{\sqrt{1-u}} - \sqrt{1-u} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-u}} - \frac{1-u}{\sqrt{1-u}} = \frac{u}{\sqrt{1-u}}$.

PROBLEMA 5:) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^{1/2})\,dt}{\cos^2(\pi/2-x)} =$

COMO $\cos \pi/2 = 0$ y $\int_0^0 \operatorname{sen}(t^{1/2})\,dt = 0$, ESTAMOS EN UNA INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$, APLICAMOS L'HOPITAL

$\displaystyle \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\ \operatorname{sen}(x^2)^{1/2}}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{sen}(\pi/2-x))} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x + 2x\cos x}{2\operatorname{sen}^2(\pi/2-x) - 2\cos^2(\pi/2-x)}$

$= \frac{0}{2} = 0$.

EXAMEN

PROBLEMA 6: $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{-\ln(1-x)}}\,dx$

Como $-\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \infty$, estamos ante una integral impropia.

$$\int_0^1 e^{\sqrt{-\ln(1-x)}}\,dx = \lim_{s\to 1^-} \int_0^s e^{\sqrt{-\ln(1-x)}}\,dx =$$

CAMBIO DE VARIABLE

$y = \sqrt{-\ln(1-x)} \iff -y^2 = \ln(1-x)$

$\iff e^{-y^2} = 1-x$ y así $x = 1-e^{-y^2}$.

$dx = 2ye^{-y^2}dy$

y si $x = s \Rightarrow y = \sqrt{-\ln(1-s)} \xrightarrow[s\to 1^-]{} \infty$

y si $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{-\ln(1-0)} = 0$

$$= \lim_{s\to 1^-} \int_0^{\sqrt{-\ln(1-s)}} e^y\, 2y\, e^{-y^2}dy = \int_0^\infty e^y\, 2y\, e^{-y^2}dy$$

$$\le 2\int_0^\infty e^y e^y e^{-y^2}dy = \int_0^\infty e^{2y-y^2}dy =$$

$y < e^y \quad \forall y > 0$

$$= \int_0^\infty e^{-y(y-2)}dy = \int_0^3 e^{-y(y-2)}dy + \int_3^\infty e^{-y(y-2)}dy \le$$

$$\le \int_0^3 e^{-y(y-2)}dy + \int_3^\infty e^{-y}dy$$

si $y-2 > 1$

$y(y-2) > y$

así $-y > -y(y-2)$

y

La primera integral existe ya que $e^{-y(y-2)}$ es continua

$$\int_3^\infty e^{-y}dy = -e^{-y}\Big|_3^\infty = e^{-3}.$$

Hemos acotado nuestra integral $\int_0^1 e^{\sqrt{-\ln(1-x)}}dx$,

luego existe esta integral impropia

EXAMEN

PROBLEMA 7 (TEORÍA) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \cos x & \cos 0 = 1 \\ (\cos x)' & -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ (\cos x)'' & -\cos 0 = -1 \\ (\operatorname{sen} x)''' & \operatorname{sen} 0 = 0 \\ (\operatorname{sen} x)^{IV)} & \cos 0 = 1 \end{array} \quad \Bigg\} \quad \text{LUEGO } P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

USANDO EL TEOREMA DE TAYLOR DEL RESTO

$$R_{2n,0}(x) = \int_0^x \frac{(\cos x)^{(2n+1)}(t)}{(2n)!} (x-t)^{2n}\, dt.$$

AHORA $|R_{2n,0}(x)| \le \int_0^x \left| \frac{(\cos x)^{(n+1)}(t)}{(2n)!} (x-t)^{2n} \right| dt \le$

$$\underset{|(\cos x)^{(n+1)}(t)| \le 1}{\le} \int_0^x \frac{|x-t|^{2n}}{n!}\, dt = -\frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

LUEGO $R_{2n,0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, PARA TODO x,

Y ASÍ LA FUNCIÓN $\cos x$ COINCIDE CON SU SERIE DE TAYLOR $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$.

EXAMEN

PROBLEMA 8: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} kx}{1+x^k} \qquad x > 1.$

a) SI $x \geq a > 1$, ENTONCES

$$\left| \frac{\operatorname{Arctan} kx}{1+x^k} \right| \leq \frac{\pi/2}{a^k} \qquad \forall x \in [a, \infty)$$

$|\operatorname{Arctan} y| \leq \pi/2$

y $1 + x^k > a^k \quad \forall x > a.$

Y COMO $\displaystyle\sum \pi/2 \left(\frac{1}{a}\right)^k < \infty$ SERIE GEOMÉTRICA CON RAZÓN $\frac{1}{a} < 1$

LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE EFECTIVAMENTE LA SERIE DE FUNCIONES CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[a, \infty)$

OBSERVACIÓN: PARA $x = 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} k}{2} = \infty.$

b) $$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} kx}{1+x^k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\operatorname{Arctan} kx}{1+x^k} \right| =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} kx}{1+x^k} \geq \frac{\operatorname{Arctan} (N+1)x}{1+x^{N+1}}$$

AHORA PARA $x_{N+1} = \left(1 + \frac{1}{N+1}\right)^{\frac{1}{N+1}} > 1$

$$\frac{\operatorname{Arctan} (N+1)\, x_{N+1}}{1 + \left(\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{\frac{1}{N+1}}\right)} > \frac{\operatorname{Arctan} N+1}{2} > \frac{\operatorname{Arctan} 1}{2}$$

ES DECIR NO ES CIERTO QUE $\forall \varepsilon > 0$ (TOMAR $\varepsilon < \frac{\operatorname{Arctan} 1}{2}$) EXISTA N_0 TAL QUE $\forall N \geq N_0$ Y $\forall x \in (1, \infty)$ SE TENGA QUE $\displaystyle\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} kx}{1+x^k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\operatorname{Arctan} kx}{1+x^k} \right| \leq \varepsilon$

LUEGO NO SE DA LA CONVERGENCIA UNIFORME EN $(1, \infty)$