EXAMEN DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

12 de Junio de 2026.

1.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{n^2 + x^2}$$

2.- a) Encuentra la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

b) Utilizando la anterior serie, calcula $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3.- Resuelve el problema de valor inicial: $\begin{cases} x'' + 2x' = 3e^t - 1 \\ x(0) = 0, \; x'(0) = 0 \end{cases}$

4.- Resuelve: $\begin{cases} 3x \equiv 2 & \text{mod.}5 \\ 2x \equiv 4 & \text{mod.}7 \\ 2x \equiv 2 & \text{mod.}4. \end{cases}$

5.- Se consideran los grupos $(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \; +)$ y $(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15} \; +)$.
a) ¿$(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \; +)$ es igual como grupo a $(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15} \; +)$? Justifica tu respuesta.
b) ¿Cuáles son los posibles órdenes del grupo $(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15} \; +)$? Encuentra elementos de cada uno de los órdenes.

6.- Se considera $f(x) = x^2 + x + 2$ un polinomio irreducible de $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcula todas las soluciones de la ecuación

$$2x^{89} + 2x^{88} + 4x^{87} = 0$$

en el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/ < f >$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen:

.- **Presencial .**

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/

La revisión del examen se efectuará el día 22 de Junio a las 13h en el aula 12. No es obligatorio acudir a la revisión.

PROBLEMA 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{n^2+x^2}$$

PARA $n=0$ $\quad \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{x^2} = \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$ ES UNA FUNCIÓN

CONTINUA Y ACOTADA YA QUE $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

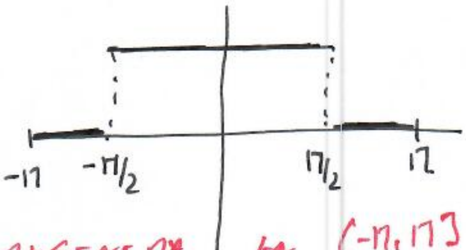
LUEGO $\exists M_0$ TAL QUE $\left|\cos x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\right| \leq M_0$

PARA $n>0$ $\quad \left|\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

COMO $M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, SE SIGUE POR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS QUE LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN TODO $\mathbb{R}$.. POR TANTO TAMBIÉN LO HACE PUNTUALMENTE.

PROBLEMA 2:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$



f es par, y la suponemos definida en $[-\pi, \pi]$ y la extendemos de forma 2π-periódica.

Así $b_n = 0$ por ser f par.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{\pi} = 1 \quad \text{luego } \frac{a_0}{2} = 1/2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} nt}{n} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \right] = \frac{2}{\pi n} \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \quad k = 0,1,\dots \end{cases}$$

Luego la serie de Fourier es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,dx = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos(2k+1)t$$

b) Como f es continua y derivable en $t = 0$

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} \quad \text{y despejando}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} x'' + 2x' = 3e^t - 1 \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Ec característica homogénea $\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 2) = 0$

$\lambda = 0$ y $\lambda = -2$ raíces luego

$x(t) = A + Be^{-2t}$ $A, B \in \mathbb{R}$ solución general de la homogénea

Búsqueda solución particular

•) $x'' + 2x' = 3e^t$ buscamos solución de tipo Ae^t.

Así $y(t) = Ae^t$, $y'(t) = Ae^t$, $y''(t) = Ae^t$ entrando en la ecu $Ae^t + 2Ae^t = 3e^t$

luego $A = 1$

$y(t) = e^t$

••) $x'' + 2x' = -1$ $\lambda = 0$ es raíz $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ luego probamos una solución de tipo $y(t) = At$

$y(t) = At$, $y'(t) = A$, $y''(t) = 0$ entrando en la ecu $0 + 2A = -1$ luego

$A = -1/2$

$y(t) = -1/2\, t$

Así $y_0(t) = e^t - 1/2\, t$ es una solución particular de la ecu de arriba y

$x(t) = A + Be^{-2t} + e^t - 1/2\, t$ es la solución general

$x'(t) = -2Be^{-2t} + e^t - 1/2$

Si $t = 0$
$x(0) = 0 = A + B + 1$
$x'(0) = 0 = -2B + 1/2 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$
$A = -5/4$

La solución buscada es

$$\boxed{x(t) = -5/4 + \frac{1}{4} e^{-2t} + e^t - 1/2\, t.}$$

PROBLEMA 3: (USANDO LAPLACE)

$$\begin{cases} x'' + 2x' = 3e^{t} - 1 \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x'' + 2x') = s^2 \mathcal{L}x(s) + 2s\, \mathcal{L}x(s)$$

$$\mathcal{L}(3e^{t} - 1) = \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s}$$

TABLAS

LUEGO $\mathcal{L}x(s) = \left(\frac{3}{s-1} - \frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^2+2s}$ SOLUCIÓN EN TRANSFORMADAS

PROBLEMA INVERSO

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{3}{s-1} \cdot \frac{1}{s(s+2)} - \frac{1}{s}\frac{1}{s(s+2)}$$

•) $\frac{3}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2}$

OPERANDO: $A(s-1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s-1) =$

$= As^2 + As - 2A + Bs^2 + 2Bs + Cs^2 - Cs =$

$= (A+B+C)s^2 + (A+2B-C)s - 2A = 3$ LUEGO

$B + C = 3/2$

$2B - C = 3/2$ $\Rightarrow 3B = 3 \Rightarrow B = 1$ y $C = 1/2$

$A+B+C = 0$

$A+2B-C = 0$

$-2A = 3$ LUEGO $A = -3/2$

••) $\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$

OPERANDO $As(s+2) + B(s+2) + Cs^2 =$

$= As^2 + 2As + Bs + 2B + Cs^2 =$ LUEGO

$= (A+C)s^2 + (2A+B)s + 2B = -1$

$C = -\frac{1}{4}$

$A+C = 0$ $\quad A = \frac{1}{4}$

$2A + B = 0$

$2B = -1$ LUEGO $B = -1/2$

TENEMOS POR TANTO QUE $\mathcal{L}x(s) = -\frac{3}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}$

DE LAS TABLAS OBTENEMOS QUE:

$$\boxed{x(t) = -\frac{3}{2} + e^{t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t} = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} + e^{t} - \frac{1}{2}t}$$

SOLUCIÓN BUSCADA

PROBLEMA 4:

$$(*)\ \begin{cases} 3x \equiv 2 \mod 5 \\ 2x \equiv 4 \mod 7 \\ 2x \equiv 2 \mod 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 2 \times 3^{-1} \mod 5 \\ x \equiv 4 \times 2^{-1} \mod 7 \\ 2x \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_4$ ×	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

NO EXISTE 2^{-1} EN $\mathbb{Z}_4$

$2x \equiv 2 \mod 4 \iff x \equiv 1 \mod 4$ ó $x \equiv 3 \mod 4$

$$\iff \begin{cases} x \equiv 2 \times 2 \mod 5 \\ x \equiv 4 \times 4 \mod 7 \\ x \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

ó BIEN

$$\begin{cases} x \equiv 4 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

COMO 5, 7 y 4 SON PRIMOS ENTRE SÍ.

A) $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$ POR EL TEOREMA CHINO DEL RESTO

$x = 4 \times [3]_5^{-1} \times 28 + 2 \times [6]_7^{-1} \times 20 + 1 \times [3]_4^{-1} \times 35 = 4 \times 2 \times 28 + 2 \times 6 \times 20 + 1 \times 3 \times 35 =$

$= 4 \times 2 \times 28 + 2 \times 6 \times 20 + 105 = 224 + 240 + 105 =$

$= 8 \times 28 + 2 \times 120 + 105$ $(140 = 5 \times 7 \times 4)$

$\equiv 569 \mod 140$

$\equiv 9 \mod 140.$

ES DECIR

$569 \ \underline{|140}$
$\underline{009} \quad 4$

B) $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$ POR EL TEOREMA CHINO DEL RESTO

$x = 4 \times [3]_5^{-1} \times 28 + 2 \times [6]_7^{-1} \times 20 + 3 \times [3]_4^{-1} \times 35$

$= 224 + 240 + 3 \times 105 =$

$= 224 + 240 + 315 =$

$\equiv 779 \mod 140$

$\equiv 79 \mod 140.$

$779 \ \underline{|140}$
$\underline{079} \quad 5$

LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA (*) SON

$x \equiv 9$ y $79 \mod 140.$

PROBLEMA 5.

$$(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 +) \quad y \quad (\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15} +)$$

a) •) 13, 3 y 5 NO TIENEN DIVISORES COMUNES

LUEGO $(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 +) \simeq (\mathbb{Z}_{13 \times 3 \times 5} +)$ CÍCLICO.

••) 13 y 15 NO TIENEN DIVISORES COMUNES

LUEGO $(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15} +) \simeq (\mathbb{Z}_{13 \times 15} +)$ CÍCLICO

LUEGO AMBOS SON EL MISMO GRUPO

b) COMO $(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15} +) \simeq (\mathbb{Z}_{13 \times 3 \times 5} +)$ SI

$a \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15} \setminus \{0\} \Rightarrow \text{ord } a \mid 13 \times 3 \times 5$.

LUEGO a SOLO PUEDE TENER ORDEN

3 COMO $(0,5) \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15}$

5 COMO $(0,3) \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15}$

13 COMO $(1,0) \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15}$

$15 = 3 \times 5$ COMO $(0,1) \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15}$

$65 = 5 \times 13$ COMO $(3,3) \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15}$

$39 = 3 \times 13$ COMO $(5,5) \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15}$

ó $13 \times 3 \times 5$ COMO $(1,1) \in \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{15}$

PROBLEMA 6:

$f(x) = x^2 + x + 2$ es irreducible en $\mathbb{Z}_5[x]$

CLARO $x=0$ $f(0) = 2 \neq 0$

$x = 1$ $f(1) = 4 \neq 0$

$x = 2$ $f(2) = 4+2+2 = 8 \neq 0$

$x = 3$ $f(3) = 9+3+2 = 14 \neq 0$

$x = 4$ $f(4) = 16+4+2 = 22 \neq 0$

ASÍ $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+x+2 \rangle$ es un cuerpo.

Tomamos $2x^{89} + 2x^{88} + 4x^{87} \in \mathbb{F}[x]$

¿Cuáles son las raíces de este polinomio en $\mathbb{F}$?

$2x^{89} + 2x^{88} + 4x^{87} = x^{87}(2x^2 + 2x + 4) =$

$= 2x^{87}(x^2 + x + 2)$.

- $x = 0$ es una raíz múltiple de orden 87.
- Por otro lado la clase de la $[x] = \alpha \in \mathbb{F}$ es raíz de $x^2 + x + 2$
- ASÍ $x^2 + x + 2 = (x-\alpha)(x-\beta) =$ con $\beta \in \mathbb{F}$

$= x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = 1 \\ \alpha\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \beta = -\alpha - 1 = 4\alpha + 4$$

Por otro lado $\alpha(4\alpha + 4) =$

$= 4\alpha^2 + 4\alpha = 4(\underbrace{\alpha^2 + \alpha + 2}_{=0} - 2) =$

$= 4 \times 3 \equiv 12 \equiv 2 \mod 5$

Las raíces del polinomio $2x^{89} + 2x^{88} + 4x^{87}$

son $x = 0$ con orden 87

$x = [x] = \alpha$

y $x = 4\alpha + 4$.