ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (M1): EXAMEN EXTRAORDINARIO

(29 DE JUNIO DE 2026)

1. **(1 punto)**

   (a) Enuncia el Axioma del Supremo en $\mathbb{R}$.

   (b) Demuestra que si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío, acotado superiormente y

   $$-A = \{-x : x \in A\},$$

   entonces $-A$ está acotado inferiormente. Halla la relación que existe entre el supremo de A y el ínfimo de $-A$.

2. **(1 punto)**

   Calcula, si existen, los límites de las siguientes sucesiones:

   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5+2n+1}{n^5+1} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^4(1/n)}}.$$

3. **(1 punto)**

   Estudia la convergencia, y la convergencia absoluta, de las siguientes series:

   $$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2} (-9)^{-n}, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log(n+1)}.$$

4. **(1 punto)**

   Calcula, si existen, los siguientes límites:

   $$(a) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cdot (2^x + x^{2026})}{3^x + x}, \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log^7(1+x)}{x^3 \operatorname{sen}^4(2x)}.$$

EXAMEN EXTRAORDINARIO. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m1).

Segundo PARCIAL. **29 de Junio de 2026 .**

5.- (**Teoría**,1 punto). Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona decreciente. Sea $x_0 \in (a, b)$. Prueba que existe $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y existe $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Prueba además que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \geq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

6.- (1 punto). Sea f una función tal que $0 < f'(x) < m$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{2m}$ es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

7.- (1 punto). Calcula $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}\, dx$

8.- (1 punto). Se considera la función $f(x) = xe^x$ para $x \in [0, 2]$. Calcula el área de la región plana delimitada entre la gráfica de f, la recta tangente a f por el punto $(1, e)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

9.- (**Teoría**,1 punto). Sea $f : [a, \infty)$ una función continua. Prueba que existe $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\, dt$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ de modo que si $x_1, x_2 > M$, entonces

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \right| \leq \epsilon.$$

10.- (1 punto). Se considea la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{n}{3}}}$. Calcula el dominio de f y también $f''(0)$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: tendrá lugar el día 7 de Julio a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN

PROBLEMA 1: a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío de modo que esté acotado superiormente e.d. existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq M \quad \forall a \in A.$$

Entonces existe $\alpha = \sup A$ e.d.

$$\alpha \geq a \quad \forall a \in A$$

y si $M \geq a \quad \forall a \in A \Rightarrow M \geq \alpha.$

b) A acotado superiormente $\Rightarrow \exists M > 0$ c.n

$$a \leq M \quad \forall a \in A$$

multiplicando por -1

$$-M \leq -a \quad \forall a \in A \quad \text{o equivalentemente}$$

$$-M \leq b \quad \forall b \in -A.$$

Luego $-A$ está acotado inferiormente y existe $\beta = \inf(-A)$

Como A está acotado superiormente $\exists \alpha = \sup A$

veamos que $-\alpha = \inf -A = \beta$

claro $\alpha \geq a \quad \forall a \in A \Rightarrow -\alpha \leq -a \quad \forall a \in A$

Luego $-\alpha$ es cota inferior de $-A$.

Si N es cota inferior de $-A$

$$N \leq -a \quad \forall a \in A, \text{ entonces}$$

$$a \leq -N \quad \forall a \in A \Rightarrow \quad \alpha \leq -N$$

por tanto $N \leq -\alpha$

$$-\alpha = \inf -A.$$

ASS

EXAMEN

PROBLEMA 2:

a) $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ SUMANDOS}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ ES MÁS PEQUEÑO

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ES MAYOR

LUEGO $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5+2n+1}{n^5+1}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^4(1/n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n}{n^5+1}\right)^{\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\operatorname{sen}^4(1/n)} n^4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^4}{2} + \frac{1}{2n}}\right)^{\frac{n^4}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}}\right]^{2\left(\frac{\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right)^4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^4}{2} + \frac{1}{2n}}\right)^{\frac{n^4}{2} + \frac{1}{2n}}\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{\frac{n^4}{2} + \frac{1}{2n}}\right]^{-\frac{1}{2n}}\right)^{2\left(\frac{\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right)^4} =$$

COMO $$\left[1 + \frac{1}{\frac{n^4}{2} + \frac{1}{2n}}\right]^{-\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{y} \quad 2\left(\frac{\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right)^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

$$= e^2.$$

EXAMEN

PROBLEMA 3:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2} (-9)^{-n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^n} \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{2n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2 < 9.$$

LUEGO
$$\left|(-1)^n \frac{1}{9^n}\left(\left[\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2\right)^n\right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{r}{9}\right)^n \quad \text{CON } r<9.$$

COMO LA SERIE GEOMETRICA $\sum \left(\frac{r}{9}\right)^n < \infty$, NUESTRA SERIE CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y POR TANTO ES CONVERGENTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\ln(n+1)\,\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)(\sqrt{n^2+1}+n)}$$

SERIE ALTERNADA COMO $\frac{1}{\ln(n+1)(\sqrt{n^2+1}+n)} \downarrow 0$, POR YA QUE $\ln(n+1)$ Y $(\sqrt{n^2+1}+n)$ CRECEN CON n, ES CONVERGENTE. DE CRITERIO DE LEIBNIZ.

AHORA LA VALOR ABSOLUTO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)(\sqrt{n^2+1}+n)}$ NO ES CONVERGENTE YA QUE $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{\ln(n+1)\sqrt{n^2+1}+n}} =$

$= \lim \left(\frac{\ln n+1}{\ln n}\right) \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n} = 2$ Y LA SERIE $\sum \frac{1}{n \ln n}$ ES DIVERGENTE (CRITERIO DE CONDENSACIÓN O DE LA INTEGRAL).

EXAMEN

PROBLEMA 1:

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}x \cdot (2^x + x^{2026})}{3^x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}x \left[\frac{2^x}{3^x+1} + \frac{x^{2026}}{x^3+1} \right] = 0$$

COMO $\dfrac{2^x}{3^x+1} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Y $\dfrac{x^{2026}}{x^3+1} \xrightarrow[x\to\infty]{\text{POLINOMIO}} 0$ EXPONENCIAL

Y $|\operatorname{sen} x| \le 1$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^7(1+x)}{x^3 \operatorname{sen}^4(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^7(1+x)}{x^3 2^4 x^4 \frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{2^4x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln^7(1+x)}{2^4 x^7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\right)^4} =$$

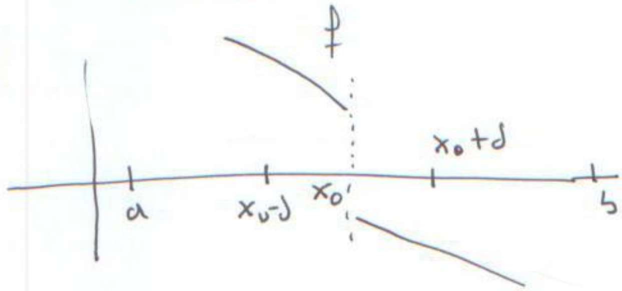
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\right)^4 = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$= \frac{1}{2^4} \lim_{x\to 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^7 \lim_{x\to 0} \left[\frac{2x}{\operatorname{sen}2x}\right]^4 = \frac{1}{2^4}\cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{16}$$

EXAMEN

PROBLEMA 5:



Sea $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$; para que f es decreciente.

$$f(x_0-\delta) \geq f(x) \geq f(x_0+\delta) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Así $\exists \quad \beta = \inf\{f(x) : x \in (x_0-\delta, x_0)\} \geq f(x_0).$

y $\exists \quad \alpha : \sup\{f(x) : x \in (x_0, x_0+\delta)\} \leq f(x_0).$

Así $\beta \geq \alpha$.

Sólo queda ver que $\beta = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y que

$$\alpha = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Sea $\varepsilon > 0$, $\beta + \varepsilon$ no es $\inf\{f(x) : x \in (x_0-\delta, x_0)\}$ (sea $\delta = x_0 - x_1$)

luego $\exists\, x_1$ tal que $\forall x \in (x_1, x_0)$

f decreciente

$$\beta + \varepsilon > f(x_1) \geq f(x) \geq \beta$$

luego $|\beta - f(x)| < \varepsilon$

Lo que prueba que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$

— o —

Sea $\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ no es supremo de $\{f(x) : x \in (x_0, x_0+\delta)\}$ (sea $\delta = x_2 - x_0$)

Así existe x_2 tal que $\forall x \in (x_0, x_2)$

$$\alpha \geq f(x) \geq f(x_2) \geq \alpha - \varepsilon.$$

f decreciente

luego $|\alpha - f(x)| < \varepsilon.$

Lo que prueba que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha.$

EXAMEN

PROBLEMA 6:] $g(x) = x - \frac{f(x)}{2m}$ $x \in \mathbb{R}$

RESTA

como f es derivable

$\frac{1}{2} < 1 - \frac{m}{2m} < g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{2m} < 1 - \frac{0}{2m} < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

y $g'(x) > 0$, luego $|g'(x)| < 1$.

Así $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|g(x) - g(y)| = |g'(c)(x-y)| < 1 \cdot |x-y|$.

T. valor medio

Así $\forall \varepsilon > 0$ si $\delta = \varepsilon$ $\forall x, y$ con $|x-y| < \delta = \varepsilon$

$|g(x) - g(y)| < |x-y| < \varepsilon$

lo que prueba que g es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 7:] $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1} dx =$

$= - \int - \operatorname{sen} x \left(\frac{\cos x - 1}{\cos^2 x + 1} \right) dx =$

como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
el cambio de variable
$u = \cos x$ $du = -\operatorname{sen} x \, dx$

$= - \int \frac{u-1}{u^2+1} du =$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{2u - 2}{u^2+1} du = -\frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} + \int \frac{1}{u^2+1} du =$

$= -\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \operatorname{Arctn} u \underset{u=\cos x}{=} -\frac{1}{2} \ln(\cos^2 x + 1) + \operatorname{Arctn}(\cos x)$

COMPROBACIÓN: $\left[-\frac{1}{2} \ln(\cos^2 x + 1) + \operatorname{Arctn}(\cos x) \right]' =$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x + 1} - 2 \cos x \operatorname{sen} x + \frac{1}{\cos^2 x + 1} - \operatorname{sen} x =$

$= \frac{\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}$

EXAMEN

PROBLEMA 8: $f(x) = xe^x \qquad x \in [0,2]$

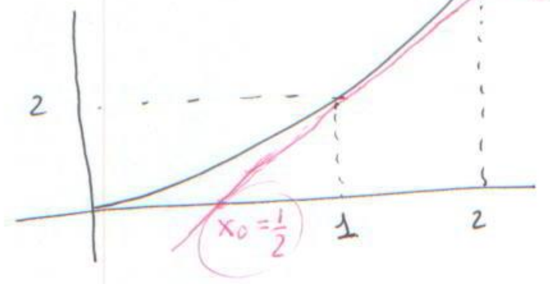
Recta tangente $\quad y = f'(1)(x-1) + e$

$f'(x) = e^x + xe^x > 0 \quad$ f función creciente.

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x > 0 \quad$ f convexa.

$y = 2e(x-1) + e \quad$ recta tangente

ASÍ



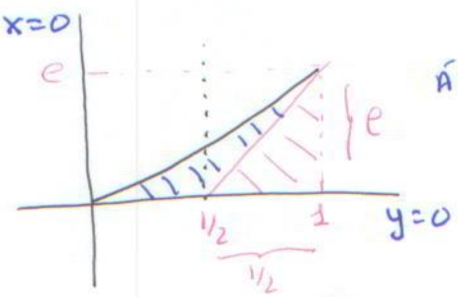
Si $y = 0$

$0 = 2e(x-1) + e$

$\iff 0 = 2(x-1) + 1$

$\iff -\frac{1}{2} = x - 1$

$\iff x = 1/2$



Área buscada, cerrada con f(x), la tangente y las rectas x=0 e y=0

$$\boxed{A = \int_0^{1/2} xe^x\,dx + \int_{1/2}^{1} xe^x\,dx - \left(\frac{1}{2}\cdot e\right)\frac{1}{2}}$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

por partes

ASÍ $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx - \frac{e}{4} = xe^x - e^x\Big|_0^1 - \frac{e}{4} =$

$$(1e^1 - e^1) - (-1) - \frac{e}{4} = \boxed{1 - \frac{e}{4}}$$

EXAMEN

PROBLEMA 9:

SI $\int_a^\infty f(t)\,dt$ EXISTE, COMO $f\,[a,\infty)$ ES CONTINUA, $\lim_{s\to\infty}\int_a^s f(t)\,dt = \int_a^\infty f(t)\,dt$.

ASÍ POR LA DEFINICIÓN DE LÍMITE EN EL INFINITO $\forall \varepsilon>0$, TOMANDO $\varepsilon/2$ EXISTE $M>0$ TAL QUE SI $x>M$ $\left|\int_a^\infty f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|<\varepsilon/2$.

LUEGO SI $x, y > M$, $\left|\int_y^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right| =$

$$= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^\infty f(t)\,dt + \int_a^\infty f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^\infty f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| + \left|\int_a^\infty f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| \le \varepsilon/2+\varepsilon/2$$

SI $\forall \varepsilon>0$ $\exists M>0$ TAL QUE SI $x_1 x_2 > M$ SE TIENE QUE $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \le \varepsilon$

ENTONCES, SEA $F(y)=\int_a^y f(t)\,dt$, F ES UNA FUNCIÓN CONTINUA POR SER INTEGRABLE ¿$\exists \lim_{y\to\infty} F(y)$?

SEA $y_n \to \infty$ SEA $(F(y_n))_{n=1}^\infty$ ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY YA QUE

$$|F(y_m)-F(y_n)| = \left|\int_a^{y_m} f - \int_a^{y_n} f\right| = \left|\int_{y_n}^{y_m} f\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

LUEGO $\exists\, l_y = \lim_{n\to\infty} F(y_n)$.

COMO ESTO ES CIERTO PARA CADA $z_n\to\infty$ ($\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(z_n) = l_z$) SOLO QUEDA VER QUE $l_y = l_z$

CLARO $|F(z_n)-F(y_n)| = \left|\int_{y_n}^{z_n} f\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. LUEGO CONVERGEN A LO MISMO

EXAMEN

PROBLEMA 10:) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{n/3}}$ SERIE DE POTENCIAS

APLICAMOS EL CRITERIO DEL COCIENTE; (A LA SERIE EN VALOR ABSOLUTO)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^{\frac{n+1}{3}}}}{\frac{|x|^n}{n^{n/3}}} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n^{n/3}}{(n+1)^{\frac{n+1}{3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n^{n/3}}{(n+1)^{n/3}(n+1)^{1/3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/3}}_{\text{ACOTADO ENTRE } 0 \text{ y } 1} \underbrace{\frac{1}{(n+1)^{1/3}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} = 0$$

LUEGO INDEPENDIENTEMENTE DE x, LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE Y POR TANTO CONVERGENTE. COMO ES UNA SERIE DE POTENCIAS, SU RADIO DE CONVERGENCIA ES INFINITO. ASÍ $\boxed{\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}}$

UNA SERIE DE POTENCIAS CENTRADA EN a (EN ESTE CASO $a=0$) COINCIDE CON LA SERIE DE TAYLOR DE LA FUNCIÓN A LA CUAL CONVERGE, ASÍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} x^n = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{n/3}}$$

LUEGO $\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2^{2/3}} \Rightarrow \boxed{f''(0) = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}}$