ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (M1): Examen Final

(29 de mayo de 2026)

1. **(1 punto)** Demuestra, usando solo la definición de límite y de supremo, que toda sucesión de números reales, monótona creciente y acotada superiormente converge a su supremo.

2. **(1 punto)**

   Sea $\alpha \in [1,2]$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida como

   $$x_1 = \alpha, \quad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Estudia la convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en función del valor de α y calcula su límite en caso positivo.

3. **(1 punto)**

   Calcula los siguientes límites:

   (a) **(0.5 puntos)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}}$, (b) **(0.5 puntos)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen}\left(1/x^2\right)}{\log x \cdot (1-\cos x)}$.

4. **(1 punto)**

   (*i*) **(0.5 puntos)** Calcula los valores $a \in [0,\infty)$ para los cuales la siguiente serie es convergente:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a^{n^2}}{n^3}.$$

   (*ii*) **(0.5 puntos)** Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie:

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n^2+2)\log n}.$$

EXAMEN FINAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m1).

Segundo PARCIAL. 29 de Mayo de 2026.

5.- (**Teoría**, 1 punto). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en todo $[a, b]$. Prueba que existe $x_0 \in [a, b]$ de modo que

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a, b].$$

6.- (1 punto). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de modo que existe f'' en $[a, b]$ y existe $x_0 \in (a, b)$ de modo que

$$f'(a)(x_0 - a) + f(a) = f(x_0).$$

Demuestra que existe un $x_1 \in (a, b)$ para el cual $f''(x_1) = 0$.

7.- (1 punto). Calcula $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}}\, dx.$

8.- (1 punto). ¿ Existe la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x + 1}{x^3 - 1}\, dx.$

9.- (1 punto). ¿Es cierta la igualdad $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2}) + \cos x + 2\, dx = 6$?

10.- (**Teoría**, 1 punto). Sean $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que existen $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformemente en $[a, b]$, prueba que

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

(**Indicación:** Podemos usar todo lo que sepamos sobre convergencia de sucesiones de funciones).

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: El próximo Miércoles 9 de Junio a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN FINAL

EJERCICIO 1:) SEA $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$

MONÓTONA CRECIENTE e.d $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ACOTADA SUPERIORMENTE: e.d $\exists M \in \mathbb{R}$ con $x_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ASÍ EL CONJUNTO $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ ES NO VACÍO Y ACOTADO SUPERIORMENTE. POR LA PROPIEDAD DEL EXTREMO SUPERIOR EN $\mathbb{R}$, EXISTE

$$\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

VEAMOS QUE $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

SEA $\varepsilon > 0$, ENTONCES $\alpha - \varepsilon$ NO ES COTA SUPERIOR DE (x_n) (YA QUE α ES LA MENOR DE LAS COTAS SUPERIORES). LUEGO $\exists n_0$ TAL QUE

$$\alpha - \varepsilon < x_{n_0} \le \alpha.$$

Y $\forall n \ge n_0$ $\quad \alpha - \varepsilon < x_{n_0} \underset{\text{CRECIENTE}}{\le} x_n \underset{\alpha \text{ SUPREMO}}{\le} \alpha$

LUEGO $|\alpha - x_n| < \varepsilon$ POR DEFINICIÓN DE LÍMITE, $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$.

EXAMEN FINAL

EJERCICIO 2: $x_1 = \alpha \in [1,2]$

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 \quad n \in \mathbb{N}$$

ASÍ $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 1 + 1 = (x_n - 1)^2 + 1$

SI $x_1 = 1$ $\quad x_{n+1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1$

SI $x_1 = 2$ $\quad x_{n+1} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2$

SI $x_1 \in (1,2) \Rightarrow x_n - 1 \in (0,1)$ y $(x_n - 1)^2 \in (0,1)$

LUEGO $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 \in (1,2)$

•) LA SUCESIÓN EN ESTE CASO ESTÁ ACOTADA YA QUE $(x_n) \subseteq (1,2)$

••) POR OTRO LADO CONSIDERAMOS $x \in (1,2)$. POR TANTO

ASÍ $x - 1 \in (0,1) \Rightarrow (x-1) > (x-1)^2$ SI $x \in (1,2)$.

$$x > x^2 - 2x + 1 + 1$$

LUEGO COMO $x_n \in (1,2)$, $\quad x_n > x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$.

ASÍ LA SUCESIÓN ES DECRECIENTE

•••) POR SER DECRECIENTE Y ACOTADA EXISTE

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell.$$

AHORA SI USAMOS ESTO EN LA EXPRESIÓN

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$$

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \Rightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad \text{ASÍ } \ell = 1 \text{ o } \ell = 2$$

RESUMIENDO

COMO $x_1 \in (1,2)$ Y LA SUCESIÓN ES DECRECIENTE EL LÍMITE SOLO PUEDE SER $\boxed{\ell = 1}$

EXAMEN FINAL

PROBLEMA 3:-

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(1-x)}(2+\sqrt{x^2+3})}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = \frac{4}{2} = 2 \,//$$

b) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen}(1/x^2)}{\log x\,(1-\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)(1+\cos x)}{\log x\,\cancel{(1-\cos^2 x)}}$$

Como $$\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,(1+\cos x)}{\log x}\right| \le \frac{2}{|\log x|} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

El límite buscado es cero

EXAMEN FINAL

PROBLEMA 4: I) $a \in [0,\infty)$ ¿$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n a^{n^2}}{n^3}$?

Serie de términos positivos.. Si aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n a^{n^2}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e\, a^n}{(\sqrt[n]{n})^3} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in [0,1) \\ e & \text{si } a = 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases}$$

Luego por el criterio, la serie converge si $a \in [0,1)$ y diverge en otro caso

II) ¿$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n^2+2)\ln n}$? Serie alternada.

Como $\dfrac{n+1}{(n^2+2)\ln n} \downarrow 0$ cuando $n\to\infty$, se sigue por el criterio de Leibniz que la serie es convergente.

En valor absoluto $\left|\dfrac{(-1)^n (n+1)}{(n^2+2)\ln n}\right| = \dfrac{(n+1)}{(n^2+2)\ln n}$.

Ahora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n^2+2)\ln n}}{\frac{1}{n\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2} = 1.$

Por el criterio de comparación por cociente la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n^2+2)\ln n}$ es absolutamente convergente si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ es convergente y solo si la otra diverge. Pero esta diverge. Por ejemplo usando el criterio de la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty.$

EXAMEN

PROBLEMA 5º] Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$.

En este caso f está acotada en $[a,b]$, es decir existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ $\forall x \in [a,b]$.

(De suponer que existe $(x_n) \subseteq [a,b]$ con $f(x_n) > n$ ó $f(x_n) < -n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in [a,b]$ y de la continuidad de f $f(x_{n_k}) \to f(x)$ se seguiría que $f(x_{n_k}) \to \infty$ ó $f(x_{n_k}) \to -\infty$, lo cual nos lleva a contradicción ya que $f(x) \in \mathbb{R}$).

Ahora sea $A = \{f(x) : x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ y M es una cota de A, luego $\exists\, \alpha = \sup A$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha$, no es cota de A ya que $\alpha = \sup A$ es la menor de las cotas superiores. Así $\exists\, x_n \in [a,b]$ con $\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \le \alpha$.

De nuevo por el teorema de Bolzano-Weierstrass y de la continuidad existe $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, por otro lado

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0),$$

$$\alpha - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le \alpha$$

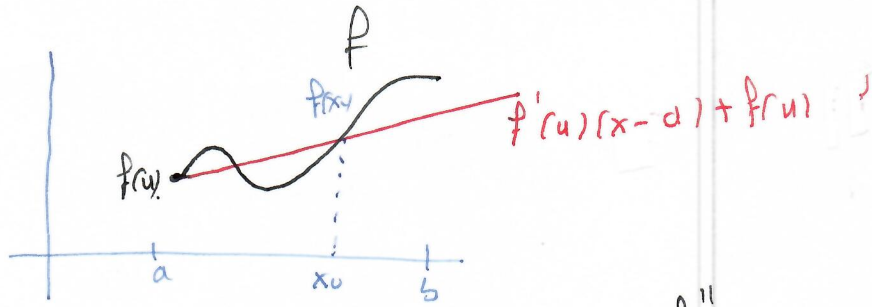
$$\downarrow k\to\infty \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\alpha \le f(x_0) \le \alpha$$

Así $f(x_0) = \alpha \ge f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

EXAMEN

PROBLEMA 6:



Como f' es continua, ya que existe f'', por el teorema del valor medio aplicado a $f: [a, x_0] \to \mathbb{R}$ $\exists\, x_1 \in (a, x_0)$ tal que

$$f'(x_1) = f'(a).$$

($f'(a)$ pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(x_0, f(x_0))$.)

Ahora el teorema de Rolle aplicado a f' en el intervalo $[a, x_1]$, nos dice que existe $x_2 \in (a, x_1)$ con $(f')'(x_2) = f''(x_2) = 0$.

PROBLEMA 7:

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1-x}} =$$

Si hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{1-x} \iff x = 1-u^2$

$dx = -2u\,du.$

$$= \int \frac{-2u}{1-u}\,du = 2\int \frac{1-u}{1-u} - \frac{1}{1-u}\,du =$$

$$= 2\int 1 - \frac{1}{1-u}\,du = 2u + 2\ln(1-u) \underset{u=\sqrt{1-x}}{=}$$

$$= 2\sqrt{1-x} + 2\ln\left(1-\sqrt{1-x}\right).$$

Comprobación $\left[2\sqrt{1-x} + 2\ln\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right]' =$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x}} + \cancel{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x}}\right)$$

$$= \frac{-(\cancel{1}-\sqrt{1-x}) \cancel{+1}}{(1-\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} = \frac{\cancel{\sqrt{1-x}}}{(1-\sqrt{1-x})\cancel{\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}.$$

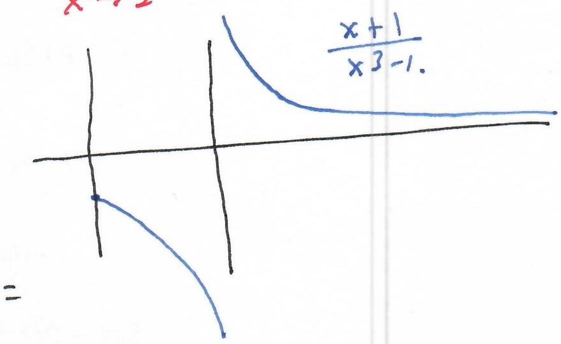
EXAMEN

PROBLEMA 8:) $\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$

OBSERVEMOS QUE $\mathrm{Dom}\ \frac{x+1}{x^3-1} = (0,\infty)\setminus\{1\}$

y $\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x^3-1} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^3+1} = \infty$

con $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^3-1} = 0$



LUEGO SI EXISTE $\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3-1}\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x+1}{x^3-1}\,dx + \int_1^\infty \frac{x+1}{x^3-1}\,dx.$$

NINGUNA DE ESTAS INTEGRALES EXISTE.

o) $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)}\,dx = \ln(1-x)\Big|_0^1 = -\infty$, AHORA

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x+1}{x^3-1}}{\frac{1}{(x-1)}}}_{\text{AMBAS FUNCIONES SON NEGATIVAS PARA } x\in(0,1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x^3-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)}{x^2+x+1} = 1$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad -1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \quad x^2 \quad -1 & \\ \quad -x^2+x & \\ \qquad x-1 & \end{array}$$

POR EL CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE NO EXISTE $\int_0^1 \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$

oo) $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3-1}\,dx \underset{\text{SI EXISTE}}{=} \int_1^2 \frac{x+1}{x^3-1}\,dx + \int_2^\infty \frac{x+1}{x^3-1}\,dx.$

COMO EN EL CASO ANTERIOR, COMPARANDO CON $\frac{1}{x-1}$ TAMPOCO EXISTE LA INTEGRAL $\int_1^2 \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$

EXAMEN

PROBLEMA 9:) $\int_0^3 \operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2}) + \cos x + 2 \, dx = 6$ =

OBSERVEMOS QUE $\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2}) = \cancel{\operatorname{sen} x \cos(-\frac{\pi}{2})} + \cos x \operatorname{sen}(-\pi/2) =$

$= -\cos x$

$= \int_0^3 2 \, dx = 6.$ ES CORRECTA LA IGUALDAD.

PROBLEMA 10:) SABEMOS POR TEORÍA QUE SI $g_n \to g$ UNIFORMEMENTE EN $[a,b]$ Y SI ADEMAS EXISTEN $\int_a^b g_n(t)\,dt$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ENTONCES EXISTE $\int_a^b g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt$

AHORA $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{\text{DEFINICIÓN DE SERIE}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} g_N(x)$; $g_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$.

UNIFORMEMENTE EN $[a,b]$. SI CADA f_n ES INTEGRABLE EN $[a,b]$, ENTONCES $g_N = f_1 + f_2 + \dots + f_N$ ES INTEGRABLE EN $[a,b]$ (LA SUMA FINITA DE FUNCIONES INTEGRABLES LO ES).

USANDO EL RESULTADO DE ARRIBA

EXISTE $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b g_N(x)\,dx =$

$= \lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx \underset{\text{INTEGRAL DE UNA SUMA}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx =$

$\underset{\text{COMO EXISTE EL LÍMITE Y POR DEFINICIÓN DE SERIE}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ c.q.d.