CARACTERIZACIONES DE LA COMPLETITUD DE $\mathbb{R}$

Definición 1. Diremos que un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es arquimediano si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ en $\mathbb{K}$. Esto es lo mismo que decir que $\mathbb{N}$, visto como subconjunto de $\mathbb{K}$, no está acotado en $\mathbb{K}$.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cuerpos arquimedianos. Sin embargo no todos los cuerpos ordenados son arquimedianos. Un ejemplo de esta situación es el cuerpo de las funciones racionales (es decir las fracciones de polinomios), con el orden definido por $P/Q > 0 \iff \lim_{x\to\infty} P(x)/Q(x) > 0$.

Teorema 2. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado arquimediano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ es convergente en $\mathbb{K}$.
2. $\mathbb{K}$ tiene la *propiedad del supremo*; es decir, todo suconjunto no vacío de $\mathbb{K}$ que esté acotado superiormente posee una cota superior mínima (supremo).
3. Todo suconjunto no vacío de $\mathbb{K}$ que esté acotado inferiormente posee una cota superior máxima (ínfimo).
4. Toda sucesión de intervalos cerrados, acotados, no vacíos, y encajados cada uno en su precedente, tiene intersección no vacía en $\mathbb{K}$. Es decir, que si $I_j = [a_j, b_j]$, $j \in \mathbb{N}$, es una sucesión de intervalos en $\mathbb{K}$ tales que $a_j \leq b_j$, $a_j \leq a_{j+1}$, y $b_{j+1} \leq b_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces existe un número $x \in \mathbb{K}$ tal que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
5. $\mathbb{K}$ tiene la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*: toda sucesión acotada en $\mathbb{K}$ posee una subsucesión convergente.

De un cuerpo ordenado que satisfaga una (y por tanto todas) de estas propiedades, se dice que es *completo*. Es fácil ver (Ejercicio 1 de la Hoja de Problemas 2) que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado completo, entonces $\mathbb{K}$ es arquimediano. El recíproco es falso, como prueba el ejemplo de $\mathbb{Q}$.

Demostración. $(1) \implies (2)$: Dado A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{K}$, existen $a_1 \in A$, y b_1 cota superior de A. Obviamente $a_1 \leq b_1$, y podemos considerar el intervalo $I_1 := [a_1, b_1]$. También podemos suponer que $a_1 < b_1$. Dividamos el intervalo I_1 en dos subintervalos de igual longitud,

$$J_{(1,1)} = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \quad J_{(1,2)} = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right].$$

Podemos considerar ahora dos casos: primeramente, si el punto medio de I_1, $\frac{a_1+b_1}{2}$, es cota superior de A, definiremos $I_2 := J_{(1,1)}$, $a_2 := a_1$, y $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. En caso contrario, existirá $a_2 \in A$ tal que $a_2 > \frac{a_1+a_2}{2}$, y definiremos $I_2 = [a_2, b_1]$, y $b_2 := b_1$.

En cualquiera de los dos casos, se tiene que $I_2 = [a_2, b_2]$ está contenido en I_1, y los intervalos I_1, I_2 tienen las propiedades de que $a_j \in A$ y b_j es cota superior de A, para $j = 1, 2$, y que

$$\text{long}(I_2) \leq \frac{1}{2}\text{long}(I_1).$$

Continuemos este proceso indefinidamente: supuesto que hemos construido $I_1, I_2, ..., I_n$ intervalos de la forma $I_j = [a_j, b_j]$ tales que $I_{j+1} \subseteq I_j$, $a_j \in A$, b_j es cota superior de A y

$$\text{long}(I_{j+1}) \leq \frac{1}{2}\text{long}(I_j)$$

para cada j, veamos cómo podemos definir I_{n+1} de manera que la colección $I_1, ..., I_{n+1}$ sigue teniendo estas propiedades. Dividamos pues el intervalo I_n en dos subintervalos de igual longitud,

$$J_{(n,1)} = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], \quad J_{(n,2)} = \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right].$$

Nuevamente consideramos ahora dos casos: en primer lugar, si el punto medio de I_n, $\frac{a_n+b_n}{2}$, es cota superior de A, definiremos $I_{n+1} := J_{(n,1)}$, $a_{n+1} := a_n$, y $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. En segundo lugar, si dicho punto medio no es cota superior de A, entonces existirá $a_{n+1} \in A$ tal que $a_{n+1} > \frac{a_n+a_n}{2}$, y definiremos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_n]$, y $b_{n+1} := b_n$.

En cualquiera de los dos casos, se tiene que $I_n = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ está contenido en I_n, y los intervalos $I_1, ..., I_{n+1}$ tienen las propiedades de que $a_j \in A$, b_j es cota superior de A, $I_{j+1} \subseteq I_j$, y

$$\text{long}(I_{j+1}) \leq \frac{1}{2}\text{long}(I_j)$$

para cada j.

Por inducción, existe entonces una sucesión $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos $I_k = [a_k, b_k]$ de $\mathbb{K}$ con estas propiedades. En particular, se deduce inmediatamente que

$$\text{long}(I_k) \leq \frac{1}{2^k}\text{long}(I_1) = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Veamos que las sucesiones (a_k) y (b_k) así construidas son sucesiones de Cauchy. En efecto, puesto que, por ser $\mathbb{K}$ arquimediano, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{n} = 0,$$

fijado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\text{long}(I_n) \leq \text{long}(I_{n_0}) \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Entonces, si $n, m \geq n_0$, tendremos que tanto I_n como I_m son subintervalos de I_{n_0}, y por tanto

$$|a_n - a_m| \leq \text{long}(I_{n_0}) \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. El mismo argumento muestra que (b_n) también es de Cauchy. Por hipótesis, tenemos entonces que (a_n) y (b_n) convergen, respectivamente, a dos números a y b en $\mathbb{K}$. Pero de hecho, puesto que

$$|a_n - b_n| = \text{long}(I_n) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

se tiene que $a = b$.

Veamos por último que $a = b = \sup A$. Por un lado, puesto que cada b_n es cota superior de A, si $x \in A$ se tiene que $x \leq b_n$ para todo n. Luego, tomando límites, también es $x \leq \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Es decir, $x \leq b$ para todo $x \in A$, luego $b = a$ es cota superior de A. Por otro lado, sabemos que cada $a_n \in A$, luego, si β es una cota superior de A, se tendrá que $a_n \leq \beta$ para todo n, y tomando límites obtenemos que $b = a = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \beta$. Es decir, $a = b \leq \beta$ para toda cota superior β de A. Por tanto $a = b = \sup A$.

(2) $\iff$ (3) se deduce fácilmente del hecho de que, si C es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y definimos $-C = \{-c : c \in C\}$, entonces C está acotado inferiormente si y sólo si $-C$ está acotado superiormente, y además $\inf C = -\sup(-C)$.

(2) & (3) $\implies$ (4): Sea (I_n) una sucesión de intervalos como en el enunciado. La sucesión (a_n) es creciente, y la sucesión (b_n) es decreciente. Consideremos los conjuntos

$$A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que A está acotado superiormente por b_1 (y de hecho también por b_n, para cualquier n), y que B está acotado inferiormente por a_1 (y también por cualquier a_n). Por hipótesis, existen

$$a := \sup A, \quad b := \inf B,$$

y se tiene, por definición de supremo e ínfimo y las observaciones anteriores sobre las cotas superior e inferior de A y B, que

$$a_n \leq a \leq b_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde se deduce también que $a \leq b$, y que

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\emptyset \neq [a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

y en particular existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Aunque no es necesario para la demostración, veamos que de hecho $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. En efecto, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, se tiene

$$a_n \leq x \leq b_n$$

para todo n. Luego x es cota superior de A y x es cota inferior de B. Por tanto, por definición de sup e ínf,

$$a = \sup A \leq x \leq \operatorname{ínf} B = b,$$

y así $x \in [a, b]$.

$(4) \implies (5)$: Sea (x_n) una sucesión acotada en $\mathbb{K}$. Entonces existe $M > 0$ tal que

$$-M \leq x_n \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $n_1 = 1$. Dividamos ahora el intervalo $I_1 := [a_1, b_1] := [-M, M]$ en dos subintervalos de igual longitud,

$$J_{(1,1)} = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right], \;\; J_{(1,2)} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right].$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I_1$, al menos uno de los subintervalos $J_{(1,1)}$, $J_{(1,2)}$ contiene infinitos términos de la sucesión. Escojamos pues uno de estos subintervalos con esta propiedad, y llamémoslo I_2, denotando $I_2 = [a_2, b_2]$. Escojamos también $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in I_2$ (lo cual puede hacerse ya que I_2 contiene infinitos términos de la sucesión).

Continuemos este proceso por inducción: supuesto que se han definido intervalos $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k$, de la forma $I_j = [a_j, b_j]$, tales que cada uno de ellos contiene infinitos términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y que $\text{long}(I_{j+1}) = \frac{1}{2}\text{long}(I_j)$, y números naturales $n_1 < n_2 < ... < n_k$ tales que $x_{n_1} \in I_1, ..., x_{n_k} \in I_k$, veamos cómo definir I_{k+1} y n_k de forma que las colecciones $I_1, ..., I_k$; $x_{n_1}, ..., x_{n_{k+1}}$ mantengan estas propiedades. Dividimos el intervalo I_k en dos subintervalos de igual longitud,

$$J_{(k,1)} = \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right], \;\; J_{(k,2)} = \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_n\right].$$

Puesto que $I_k = [a_k, b_k]$ contiene infinitos términos de la sucesión (x_n), al menos uno de estos dos subintervalos contiene también infinitos términos de (x_n). Escojamos uno de estos subintervalos con esta propiedad, y denotémoslo $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Escojamos también $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k+1} > n_k$ y $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$.

Por inducción existe pues una sucesión de intervalos cerrados y acotados encajados (I_k) y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$x_{n_k} \in I_k, \;\; \text{long}(I_k) = \frac{1}{2^k}\text{long}(I_1),$$

y en particular $\lim_{k\to\infty} \text{long}(I_k) = 0$ (ya que $\mathbb{K}$ es arquimediano). Por hipótesis existe $x \in \mathbb{K}$ tal que

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k].$$

Veamos que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. En efecto, tenemos que

$$x, x_{n_k} \in [a_k, b_k]$$

para todo k, de donde deducimos que

$$|x_{n_k} - x| \leq b_k - a_k = \text{long}(I_k) \to 0 \text{ cuando } k \to \infty,$$

y por tanto que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

$(5) \implies (1)$: Sea (x_n) de Cauchy. Entonces (x_n) está acotada. Por hipótesis, existe (x_{n_k}) subsucesión convergente de (x_n). Pero una proposición anterior nos dice que toda sucesión de Cauchy que posea una subsucesión convergente es convergente. Por tanto (x_n) converge. □

Observación 3. En las hipótesis de (4) del teorema anterior, si además se sabe que $\lim_{n\to\infty} \text{long}(I_n) = 0$, entonces el punto x del enunciado es único.

Demostración. En efecto, en la demostración de (2) & $(3) \implies (4)$ se ha visto que

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

donde $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, y $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene entonces que

$$a, b \in [a_n, b_n]$$

para todo n, luego

$$|a - b| \leq \text{long}(I_n) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

y por tanto $a = b$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{a\} = \{b\}.$$

□

Corolario 4. El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales satisface todas las afirmaciones del teorema anterior.

Demostración. Previamente hemos construido los números reales a partir de los racionales y hemos visto que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tiene una estructura de cuerpo ordenado arquimediano. También hemos visto que cualquier sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$. Por tanto a $\mathbb{R}$ se le puede aplicar el teorema anterior. □

Corolario 5. Si (a_n) es una sucesión creciente y acotada superiormente en $\mathbb{R}$, entonces (a_n) converge, y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Denotemos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, y $a = \sup A$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo, existe algún elemento de A, digamos un $a_{n_0} \in A$, tal que $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Como la sucesión es creciente tenemos entonces que $a_n \geq a_{n_0}$ si $n \geq n_0$. Por otro lado, $a_n \leq a$, por ser a cota superior de A. Luego

$$|a_n - a| = a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Finalmente, veremos que $\mathbb{R}$ es, *esencialmente* (es decir, salvo isomorfismo de cuerpos ordenados), el único cuerpo ordenado completo.

Definición 6. Sean $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ y $(\mathbb{F}, \oplus, \odot, \preceq)$ cuerpos ordenados. Se dice que $\mathbb{K}$ y $\mathbb{F}$ son isomorfos como cuerpos ordenados si existe una aplicación $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{F}$ tal que:

1. φ es biyectiva.

2. $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{K}$.
3. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{K}$.
4. $x \leq y \implies \varphi(x) \preceq \varphi(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{K}$.

En otras palabras, un isomorfismo de cuerpos ordenados es una aplicación biyectiva entre dos cuerpos que preserva las operaciones de suma y producto y las relaciones de orden definidas en dichos cuerpos.

Teorema 7. Si $(\mathbb{F}, \oplus, \odot, \preceq)$ es un cuerpo ordenado y $\mathbb{F}$ es completo, entonces existe un isomorfismo de cuerpos ordenados $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$.

Demostración. Sean $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ los elementos neutros para las operaciones $\oplus$ y $\odot$, respectivamente, en $\mathbb{F}$. Definamos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ como sigue. Primeramente definimos φ en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ por

$$\varphi(0) = \mathbf{0}, \;\; \varphi(n) = \overbrace{\mathbf{1} \oplus ... \oplus \mathbf{1}}^{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0, \text{ y } \varphi(n) = \overbrace{\mathbf{1} \oplus ... \oplus \mathbf{1}}^{|n| \text{ veces}} \text{ si } n < 0.$$

Es inmediato ver que $\varphi(n+m) = \varphi(n) \oplus \varphi(m)$ y $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \odot \varphi(m)$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Denotaremos

$$\mathbf{n} = \varphi(n), \text{ y } \mathbf{Z} = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora podemos definir φ en $Q \subset \mathbb{R}$ por

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi(n) \odot \varphi(m)^{-1} := \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}.$$

Denotaremos $\mathbf{Q} = \varphi(\mathbb{Q})$. Es fácil ver que φ está bien definida en $\mathbb{Q}$, y que $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$. Además, es claro que $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbf{Q}$ es biyectiva, y preserva la estructura de orden, es decir, para todo $q \in \mathbb{Q}$, se tiene que

$$\mathbf{0} \preceq \varphi(q) \iff 0 \leq q.$$

Por tanto $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbf{Q}$ es un isomorfismo de cuerpos ordenados. A partir de ahora denotaremos

$$\mathbf{q} = \varphi(q), \;\; \mathbf{q} + \mathbf{r} = \varphi(q+r), \;\; \mathbf{q} - \mathbf{r} = \varphi(q-r), \;\; \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{r}} = \varphi\left(\frac{q}{r}\right).$$

Veamos a continuación cómo extender la definición de φ desde $\mathbb{Q}$ hasta $\mathbb{R}$ para conseguir un isomorfismo de cuerpos ordenados entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{F}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, sabemos que existe una sucesión $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. En particular (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Como la definición de sucesión de Cauchy sólo involucra la operación de diferencia de números y la estructura de orden, y $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbf{Q}$ preserva tanto las diferencias como el orden, es claro que $(\varphi(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{Q} \subset \mathbb{F}$. Como estamos suponiendo que $\mathbb{F}$ es completo, entonces $(\varphi(x_n))$ converge en $\mathbb{F}$, y podemos definir

$$\varphi(x) := \mathbf{x} := \lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

Veamos que $\varphi(x)$ no depende de la sucesión (x_n) escogida. Si (x'_n) es otra sucesión de números racionales con $\lim_{n\to\infty} x'_n = x$, puesto que φ preserva diferencias y orden, es evidente que φ transforma sucesiones convergentes a 0 en sucesiones convergentes a $\mathbf{0}$, y se tiene entonces que

$$0 = x - x = \lim_{n\to\infty} x_n - x'_n \implies \mathbf{0} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} \ominus \mathbf{x'_n},$$

luego

$$\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x'_n}.$$

Así $\mathbf{x} = \varphi(x)$ no depende de la sucesión de racionales (x_n) escogida para que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Por otra parte, usando el hecho de que φ transforma sucesiones convergentes a 0 en sucesiones convergentes a $\mathbf{0}$, y por supuesto que $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbf{Q}$ es isomorfismo de cuerpos ordenados, es fácil ver que $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$, y $x \leq y \implies \varphi(x) \preceq \varphi(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, si

$(x_n), (y_n) \subset \mathbb{Q}$ son sucesiones tales que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, tenemos que

$$\mathbf{0} = \varphi(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(x_n + y_n - (x_n + y_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \oplus \varphi(y_n) \ominus \varphi(x_n + y_n) = \varphi(x) \oplus \varphi(y) \ominus \varphi(x + y),$$

donde $\ominus$ denota la operación de diferencia en $\mathbb{F}$, luego

$$\varphi(x) \oplus \varphi(y) = \varphi(x + y).$$

Sólo queda comprobar que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ es biyectiva. Para ver que φ es inyectiva basta probar que $\varphi(x) = \mathbf{0} \implies x = 0$. Y en efecto, si $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ converge a x y $\varphi(x_n)$ converge a $\mathbf{0}$, entonces $x = 0$, ya que si por ejemplo $x > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq x/2$ para todo $n \geq n_0$, luego $\varphi(x_n) = \mathbf{x_n} \succeq \mathbf{x/2} \succ \mathbf{0}$ para todo $n \geq n_0$, y por tanto $\mathbf{0} = \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \mathbf{x/2} \succ \mathbf{0}$, luego $\mathbf{0} \succ \mathbf{0}$, absurdo. Análogamente, es imposible que $x < 0$, y por tanto $x = 0$.

Finalmente, veamos que φ es sobreyectiva. Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{F}$, podemos encontrar una sucesión $(\mathbf{x_n}) \subset \mathbf{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x}$ (esto es consecuencia de que $\mathbb{F}$ es completo, luego arquimediano, y por tanto la representación natural de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{F}$ es densa en $\mathbb{F}$; ver el ejercicio 1 de la Hoja de problemas 2). Sea $x_n = \varphi^{-1}(\mathbf{x_n})$. Como $(\mathbf{x_n})$ es de Cauchy en $\mathbb{F}$, y $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbf{Q}$ es biyectiva y preserva el orden, es inmediato que (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por tanto existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Entonces, por definición de φ,

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x}.$$

$\square$