EXAMEN DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPOS D Y B.

SEGUNDO CUATRIMESTRE. PARTE 2. 20 DE JUNIO DE 2005

1. Calcular el área de la región determinada por las gráficas de las funciones $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x+1)$, $g(x) = x^2 + 5$, y las rectas $x = 0$, $x = 1$. (Valor: un punto.)

2. Considérese la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -n, \\ \frac{\sqrt{|x|}}{n^2} & \text{si } -n \leq x \leq 0, \\ \frac{x^2}{n^2}\cos(\frac{n}{x}) & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{1}{n^8+x^2} & \text{si } x > \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

Se pide:

1. Hacer un esbozo genérico de la gráfica de f_n, poniendo especial cuidado en determinar el valor del máximo absoluto de cada función f_n.
2. Estudiar si la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge o no uniformemente en $\mathbb{R}$.
3. Calcular $\lim_{n\to\infty} \int_{-100}^{100} f_n(x)dx$.

(Valor: tres puntos.)

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y acotada. Probar que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f''(x_0) = 0$. (Valor: un punto.)