ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 08/01/2018.

PROBLEMAS

1. Calcular el valor de la integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}.$$
Indicación: aplicar el teorema de los residuos integrando $f(z) = z^2/(1+z^4)$ en el borde del semidisco superior de centro 0 y radio R.

2. Si $|\xi| < 1$, demostrar que $\varphi(z) = (z-1)^n e^{2z} + \xi(z+1)^n$ tiene n ceros en el semiplano derecho. Indicación: aplicar el teorema de Rouché en el borde del semidisco derecho de centro 0 y radio R (con un $R > 0$ adecuado).

3. Demostrar que si $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ es una función tal que f^2 y f^3 son holomorfas, entonces f es holomorfa.

4. Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones enteras, y supongamos que $f \circ g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f y g son biyectivas, y que $f = g^{-1}$.

5. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua con $\int_{-\infty}^{\infty} |g| < \infty$, sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ la función $z \mapsto f(t,z)$ es holomorfa. Supongamos además que
$$\sup_{(t,z)\in\mathbb{R}\times\Omega_R} |f(t,z)| < \infty$$
para cada $R > 0$, en donde $\Omega_R := \{z \in \Omega : |z| \leq R, \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega) \geq 1/R\}$ si $\Omega \neq \mathbb{C}$, y $\Omega_R := \overline{D}(0,R)$ si $\Omega = \mathbb{C}$. Demostrar que entonces la función $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por
$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t,z)\, dt$$
es holomorfa.

Esta parte supone los otros 5 puntos de la nota del examen. Cada problema vale un punto.