ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 25/01/2016.

PROBLEMAS

1. Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx.$$

Indicación: aplicar el teorema de los residuos integrando $f(z) = e^{iz}/(1+z^4)$ en el semidisco superior de centro 0 y radio R.

2. Sean f una función holomorfa definida en un entorno de z_0. Supongamos que z_0 es cero de orden 4 de la derivada f', y pongamos $w_0 = f(z_0)$. Demostrar que:

a) Existe $\rho > 0$ tal que $f'(z) \neq 0$ y $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$.

b) Existe $\delta > 0$ tal que para todo $w \in D(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$, la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente 5 soluciones distintas en $D(z_0, \rho)$.

3. Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en $\mathbb{D}$, y supongamos que f es constante en $\partial\mathbb{D}$. Demostrar que entonces f es constante en $\mathbb{D}$.

4. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diferenciable en sentido real, con Df continua. Supongamos que

$$\int_{\partial D} f = 0$$

para todo disco cerrado D contenido en Ω. Demostrar que entonces f es holomorfa en Ω.[1]

Esta parte supone los otros 5 puntos de la nota del examen. Los problemas 1 y 4 valen 1,5 puntos cada uno, y los problemas 2 y 3 un punto cada uno.

[1] Si has terminado de contestar a todas las preguntas del examen y aún te sobra tiempo, demuestra también que la hipótesis de que f sea de clase C^1 no es necesaria: basta que f sea continua en Ω para tener el mismo resultado. Esto no te dará más puntuación en el examen, aunque sí mayores honores y también, posiblemente, cierta satisfacción personal.