ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO B.
EXAMEN FINAL DEL 11/01/2019.

PROBLEMAS

1. Usar el teorema de los residuos en el semicírculo superior de radio R para calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2} dx.$$

2. Sea E un conjunto discreto (es decir, sin puntos de acumulación). Demostrar que si $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada entonces f es constante.

3. Sea $h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ una función continua a trozos (en el sentido de que h es continua salvo en un conjunto de puntos aislados $A \subset (0, \infty)$, y en cada $a \in A$ existen $\lim_{x \to a^-} h(x)$ y $\lim_{x \to a^+} h(x)$). Supongamos que existen $\alpha, \beta \geq 0$ tales que

$$|h(x)| \leq \alpha e^{\beta x}$$

para todo $x \in [0, \infty)$. Demostrar que la función

$$f(z) = \int_0^{\infty} h(x) e^{-zx},$$

está bien definida y es holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \beta\}$. Demostrar también que si se tiene $|h(x)| \leq a x^N e^{bx}$ para todo $x \in [0, \infty)$, donde $a, b > 0$, $N \in \mathbb{N}$, entonces existe $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq C/(\mathrm{Re} z - b)^{N+1}$ para todo z con $\mathrm{Re} z > b$.

4. Sea f holomorfa en $D(0, 2)$, y supongamos que f es inyectiva en $\overline{D}(0, 1)$, y que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(0, 1)$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que f es inyectiva en $D(0, 1 + \varepsilon)$.

5. Sea $f : D\left(0,\, 1 + 10^{-6}\right) \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que existe z_0 con $|z_0| = 1$ tal que, si definimos

$$g(x, y) = |f(x + iy)|,$$

entonces:

a) g es diferenciable (en sentido real) en z_0;
b) para $w_0 = \nabla g(z_0)$ se tiene que $\mathrm{Re}(z_0 \overline{w_0}) \geq 0$.

Si estás haciendo examen con teoría, debes intentar resolver exclusivamente los problemas 1, 2 y 3. Si estás haciendo examen sin teoría, deberás intentar resolver todos los problemas. En ambos casos, el valor de los problemas será el siguiente. Problema 1: un punto y medio; problema 2: un punto y medio; problema 3: dos puntos; problema 4: un punto; problema 5: un punto y medio.