ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO T2. EXAMEN FINAL DEL 14/01/2020.

PROBLEMAS

1. Usar el teorema de los residuos en el semicírculo superior de radio R para calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{1+x^4} dx.$$

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua, y supongamos que f es holomorfa en $\{x + iy : xy \neq 0\}$. Demostrar que f es holomorfa en $\mathbb{C}$.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, y supongamos que $f(f(1/n)) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que o bien $f(z) = z$ para todo z o bien existe un número complejo w tal que $f(z) = w - z$ para todo z.

4. Si (u_n) es una sucesión de funciones armónicas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ que converge, uniformemente sobre cada compacto de Ω, a una función u, probar que u es armónica en Ω.
Indicación: cierta sucesión de funciones estará uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de su dominio.

5. Sean f, g holomorfas en un abierto que contiene al disco unidad cerrado, y supongamos que f tiene ceros en $z_1, ..., z_m \in \mathbb{D}$ y no tiene ningún cero en $\partial\mathbb{D}$. Calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) dz.$$

6. Si $f : D(0, 1 + \varepsilon) \to \mathbb{C}$ es holomorfa (donde $\varepsilon > 0$) y la restricción de f a $\partial D(0, 1)$ es inyectiva, demostrar que f es también inyectiva en $D(0, 1)$.

Si estás haciendo examen con teoría, debes intentar resolver exclusivamente los problemas 1, 2, 3 y 4. Si estás haciendo examen sin teoría, deberás intentar resolver todos los problemas. En ambos casos, el valor de los problemas será el siguiente. Problemas 1 y 2: un punto cada uno; problemas 3 y 4: un punto y medio cada uno; problemas 5 y 6: un punto y cuarto cada uno.