ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO T2. EXAMEN FINAL DEL 14/01/2020.

PREGUNTAS DE TEORÍA

Elegir una (y sólo una) de las opciones siguientes:

Opción A) Demostrar los tres resultados siguientes:

(A1) Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que

$$\int_T f = 0$$

para todo triángulo T contenido en Ω cuya región interior también está contenida en Ω. Entonces f es holomorfa en Ω.

(A2) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, y supongamos que (f_n) converge a f, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Entonces f es holomorfa.

(A3) Con las mismas hipótesis del resultado (A2) se tiene también que, para cualquier $j \in \mathbb{N}$ y cualquier compacto K de Ω, la sucesión de derivadas j-ésimas $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la derivada j-ésima $f^{(j)}$, uniformemente en K.

Opción B) Demostrar los dos enunciados siguientes:

(B1) Si $f : D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ está acotada y es holomorfa entonces f tiene una extensión F que es holomorfa en $D(z_0, r)$.

(B2) Sea z_0 una singularidad aislada de una función f. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f tiene una singularidad esencial en z_0;

(2) Para todo $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión (z_n) que converge a z_0 tal que $f(z_n)$ converge a w. Es decir, $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$, para cada $r > 0$.

Esta pregunta supone otros 2,5 puntos de la nota del examen.