ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 12/01/2018.

PROBLEMAS

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n+2}/n$;
- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\log n}{x^n}$, siendo $x>0$;
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!)}{(2n)!}$

2. Estudiar la continuidad, la continuidad uniforme, y la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{x}{1+x^2} & \text{si } x<0; \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0\leq x\leq 2\pi; \\ -\frac{(x-2\pi)^2}{1+(x-2\pi)^4} & \text{si } x\geq 2\pi, \end{cases}$$

hallando asimismo los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad, y los máximos y mínimos locales y absolutos, si los hubiera.

3. Supongamos que una función derivable $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cumple que $|f'(x)|\leq A\sqrt{x}+B$ para todo $x>0$, donde A,B son constantes mayores o iguales que 0. Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0.$$

4. Demostrar que si una función convexa $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ está acotada superiormente entonces f es decreciente. Deducir que si $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ es convexa y está acotada, entonces existe $\lim_{x\to\infty}f(x)\in\mathbb{R}$.

Esta parte supone los otros 5 puntos de la nota del examen. Los problemas 1, 2 y 3 valen 1.5 puntos cada uno, y el problema 4 medio punto.