ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 12/01/2018.

TEST Y PREGUNTAS DE TEORÍA

I) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Dado cualquier número real x existe una sucesión de números racionales (q_n) tales que $q_n > x$ para todo n y $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

2. Si una sucesión (a_n) satisface que $a_n > 0$ para todo n y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente.

3. Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n+2}/n$ son ambas convergentes.

4. Existe una biyección $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{f(n)}\sqrt{f(n)+2}/f(n) = \pi e^{\pi}$.

5. Para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ se tiene que $\limsup_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi)x^n}{x^{2n}+\cos(n\pi)x^n} = 0$.

6. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sólo toma valores enteros y para cada $a\in\mathbb{R}$ existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces f es constante.

7. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable y $|f'(x)|\leq 3$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces f es uniformemente continua.

8. Si $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, y $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continua pero no uniformemente continua entonces no existe alguno de los límites $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

9. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable y $f'(0)>0$ entonces existe $\delta>0$ tal que f es creciente en el intervalo $(-\delta,\delta)$.

10. Si f y g son derivables en $(0,\infty)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, y no existe $\lim_{x\to 0^+} f'(x)/g'(x)$, entonces tampoco existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)/g(x)$.

Este test supone 1,5 puntos de la nota del examen.

II) Demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass para funciones: *si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces f está acotada.* **Después, demostrar el teorema de Weierstrass:** *si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua entonces f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[a,b]$.*

Esta pregunta supone otros 3,5 puntos de la nota del examen.