EUACIONES DIFERENCIALES, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 18/01/2019.

TEST TEÓRICO-PRÁCTICO

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas o, en el caso de la pregunta 5, escribir el número pedido.

1. Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1, $x \in \Omega$, y supongamos que existe $\lim_{t\to-\infty} \Phi(t,x) = x_0$. Entonces x_0 es un punto de equilibrio.

2. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definida por $f(x_1, ..., x_n) = (|\cos x_n|, |\cos x_{n-1}|^2, ..., |\cos x_1|^n)$ entonces existe una única solución del problema $x'(t) = f(x(t))$, $x(0) = (\pi/2, ..., \pi/2)$, definida en todo $\mathbb{R}$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Si una órbita $\mathcal{O}_x$ está acotada entonces es un punto de equilibrio o una órbita periódica no constante.

4. Sea $\phi(t, x, y, z)$ el flujo del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t)\,\mathrm{sen}\, z(t) \\ y'(t) = \cos^8 x(t) + y(t) + 4z(t) \\ z'(t) = 6x(t)\,\mathrm{sen}\, y(t) - 3z(t). \end{cases}$$

Entonces $\mathrm{vol}\left(\{\phi(-14, x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}\right) =$ ....

5. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ acotado tal que $f(0,0) = (0,0)$ y

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \lim_{t\to-\infty} \phi(t, x, y) = (0,0)\}$ tiene interior vacío.

6. Sea $f = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que $f(0,0,0) = (0,0,0)$ y

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 < 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Entonces $(0,0,0)$ es el único punto de equilibrio de f, y su cuenca de atracción es todo $\mathbb{R}^3$.

7. Sea $\phi(t, x_0, y_0, \lambda) = (\phi_1(t, x_0, y_0, \lambda), \phi_2(t, x_0, y_0, \lambda))$ la solución del problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 + y(t)^2\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ y'(t) = x(t)^2 \cos\lambda + y(t)^2 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases}$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo t donde esté definida la solución, existe

$$\frac{\partial^3 \phi(t, x_0, y_0, \lambda)}{\partial t \partial \lambda^2} = \left(2 + \mathrm{sen}(\lambda)\phi_2(t, x_0, y_0, \lambda)^2, 2 + \cos(\lambda)\phi_1(t, x_0, y_0, \lambda)^2\right).$$

8. Si $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y está acotado inferiormente entonces las soluciones de $x''(t) = -\nabla U(x(t))$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

9. Sea $g(x, y, z) = x^3 + x + y^3 + z^2 - 1$. Los conjuntos de nivel $g^{-1}(0)$ y $g^{-1}(12)$ tienen diferente número de componentes conexas.

10. Los sistemas

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x - 4y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 4x, \\ y' = 8y \end{cases}$$

son topológicamente conjugados.

Este test supone 2,5 puntos de la nota del examen. Cada pregunta acertada suma 0,25 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos.