ECUACIONES DIFERENCIALES, GRUPO T1. EXAMEN FINAL DEL 9/01/2020.

PROBLEMAS

1. Estudiar el siguiente sistema y hacer un esbozo de su diagrama de fases

$$\begin{cases} x' = (2-y)xy \\ y' = (x-2)y^2. \end{cases}$$

2. Sea $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $\theta(0) = 0 = \theta'(0)$ y $|\theta(t)| \leq 1/2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = y(1-x^2-y^2) - x^5 + y\,\theta(|y|)\,\theta(|x|) \end{cases}$$

posee alguna órbita periódica no constante, y estudiar la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

3. Usar la desigualdad de Gronwall con $\psi(t) = \|x(t)\| - \rho(t)$ (enunciando con precisión la versión de dicha desigualdad que se utilice, y detallando con qué funciones o constantes se aplica) para demostrar lo siguiente. Sea $g(t)$ una función definida en $\mathbb{R}$, localmente Lipschitz, y sea $\rho(t)$ la solución (que suponemos definida en un intervalo $[t_0, t_1]$) del PVI

$$\begin{cases} \rho'(t) = g(\rho(t)) \\ \rho(t_0) = \rho_0. \end{cases}$$

Supongamos que $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ satisface $\|x'(t)\| \leq g(\|x(t)\|)$, $\|x(t_0)\| \leq \rho_0$. Entonces se tiene $\|x(t)\| \leq \rho(t)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = (-\varepsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x - \varepsilon y)(z+1) \\ z' = -z^3. \end{cases}$$

Probar que cuando $\varepsilon = 0$ el origen no es asintóticamente estable, mientras que cuando $\varepsilon > 0$ el origen es asintóticamente estable y su cuenca de atracción contiene el semiespacio $\{z > -1\}$.

Si estás haciendo examen con teoría, debes intentar resolver exclusivamente los problemas 1 y 2. Si estás haciendo examen sin teoría, deberás intentar resolver todos los problemas. En ambos casos, el valor de los problemas será el siguiente. Problemas 1 y 2: dos puntos y medio cada uno; problemas 3 y 4: un punto y cuarto cada uno.