ECUACIONES DIFERENCIALES, GRUPO T1. EXAMEN FINAL DEL 9/01/2020.

TEST TEÓRICO-PRÁCTICO

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas o, en el caso de la pregunta 5, escribir el número pedido.

1. Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $f(t,x,y) = \left(\sqrt{|t|}e^{xy}, x^2 - y^2\right)$ entonces existe cierto $T > 0$ tal que la ecuación integral $\varphi(t) = (e, \pi) + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds$, $t \in [-T, T]$, tiene solución única.

2. El PVI $\{x'(t) = t^2|x(t)|^{1/2}, x(t_0) = x_0\}$ tiene solución única para cualesquiera $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

3. La familia de funciones $\{\varphi_\lambda(x,y), \lambda \in \mathbb{R}\}$ definida por $\varphi_\lambda(x,y) = 1/\left(1 + x^4 + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\lambda)\operatorname{sen}(y^6)\right)$ es equicontinua y uniformemente acotada en $\mathbb{R}$.

4. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $f(x,y,z) = (|x+y|, |\cos(y+z)|, \cos|x+z|)$ entonces existe una única solución del PVI $(x'(t), y'(t), z'(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, $(x(0), y(0), z(0)) = (\pi/2, 0, \pi)$, que está definida en todo $\mathbb{R}$.

5. Sea $\phi(t,x,y,z)$ el flujo del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3\operatorname{sen} y(t)\operatorname{sen} z(t) \\ y'(t) = \cos^6 x(t) + y(t) + 4z(t)^2 \\ z'(t) = 6x(t)\operatorname{sen} y(t) - 3z(t). \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{vol}\left(\{\phi(18,x,y,z) \,:\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 10\}\right) =$ ....

6. Sea $g(x,y,z) = x^3 + 2x + y^3 + \operatorname{sen}^2(xyz) + 21$. Los conjuntos de nivel $g^{-1}(1)$ y $g^{-1}(12)$ tienen igual número de componentes conexas.

7. Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1, $x \in \Omega$, y supongamos que existe $\lim_{t \to -\infty} \Phi(t,x) = x_0 \in \Omega$. Entonces x_0 es un punto de equilibrio.

8. Los sistemas

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = 3x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 4x \\ y' = 8y \end{cases}$$

son topológicamente conjugados.

9. El origen es un equilibrio inestable del sistema

$$\begin{cases} x' = x - 3y + x^2 \\ y' = -2x + y + y^2. \end{cases}$$

10. El sistema

$$\begin{cases} x' = 2(1 + x^2 + y^2) - \operatorname{sen}(xy) \\ y' = xy^2. \end{cases}$$

no tiene ninguna órbita periódica.

Este test supone 2,5 puntos de la nota del examen. Cada pregunta acertada suma 0,25 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos.