TEORÍA DE LA MEDIDA. EXAMEN FINAL DEL 8 DE ENERO DE 2024.

PROBLEMAS

1. Sea X un espacio métrico, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de los conjuntos $\mathcal{H}^s$-medibles, y $T : X \to X$ una isometría sobreyectiva (es decir, una aplicación sobreyectiva tal que $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ para todos $x, y \in X$). Demostrar que entonces, para todo $s > 0$ y toda toda $f \in L^1(\mathcal{H}^s)$, se cumple

$$\int_X f d\mathcal{H}^s = \int_X (f \circ T) d\mathcal{H}^s.$$

Indicación: considerar primero el caso en que $f = \chi_E$ para $E \in \mathcal{A}$. "You know the drill".

2. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completa, $f : X \to [0, \infty]$ una función arbitraria, y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de funciones medibles en X tales que

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f \leq g_{n+1} \leq g_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lim_{n \to \infty} \int_X (g_n - f_n) d\mu = 0$. Probar que f es medible.

3. Sabemos que existen homeomorfismos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para algunos conjuntos $E \subset \mathbb{R}$ con $|E| = 0$ el conjunto $\varphi(E)$ puede tener medida positiva o incluso no ser medible Lebesgue. Sin embargo, demuéstrese lo siguiente: si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo entonces existe $Z \subset \mathbb{R}^n$ de medida cero tal que, para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n \setminus Z$, si $|E| = 0$ entonces $|\varphi(E)| = 0$.

Indicación: empezar probando que $\mu(A) = |\varphi(A)|$ define una medida en los borelianos de $\mathbb{R}^n$.