TEORÍA DE LA MEDIDA. EXAMEN FINAL DEL 14 DE JUNIO DE 2024.

TEST TEÓRICO-PRÁCTICO

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas o, dado el caso, escribir los números pedidos.

1. Si X es un espacio métrico y $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ cumple que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n(A_k) < 5$, entonces se tiene que $\mathcal{H}^n\left(\{x \in X : x \in A_k \text{ para infinitos } k\}\right) = 0$.

2. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue y $\mathcal{L}_n(A) > 0$ entonces existe $K \subset A$ compacto tal que $\mathcal{L}_n(K) > 0$.

3. Si $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to [0,\infty]$ es una medida tal que $\mu(a+E) = \mu(E)$ para todo $a \in \mathbb{R}^3$ y todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$, y $c := \mu(\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1\})$, entonces $\mu(E) = \frac{3c}{4\pi}\mathcal{L}_3(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

4. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es igual a f en $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-casi todo punto, entonces g es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible.

5. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida entonces para toda sucesión de funciones medibles $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge puntualmente a una función f existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ y (f_n) converge uniformemente en E.

6. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y X es un espacio métrico localmente compacto, entonces para toda función medible $f : X \to \mathbb{R}$ que sea positiva en casi todo punto, para todo $x_0 \in X$ y para todo $R > 0$ se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{B(x_0,R)} e^{-tf(x)} d\mu(x) = 0.$$

7. Si una sucesión de funciones medibles $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge a en medida a una función f entonces alguna subsucesión suya converge en casi todo punto a f.

8. Si $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una identidad aproximada en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $f * \delta_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$, y $\lim_{n\to\infty} \|f * \delta_n - f\|_p = 0$.

9. No existen conjuntos $E \subset \mathbb{R}$ medibles tales que $\frac{1}{100} < \frac{|E\cap I|}{|I|} < \frac{99}{100}$ para todo intervalo abierto I.

10. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es de Lipschitz entonces $\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}^1(A \cap f^{-1}(\{(y\})) dy = \int_A Jf(x)dx$ para todo boreliano $A \subset \mathbb{R}^3$.

Este test supone 2,5 puntos de la nota del examen. Cada pregunta acertada suma 0,25 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos. No hay que justificar ninguna respuesta.