TEORÍA DE LA MEDIDA. EXAMEN FINAL DEL 14 DE JUNIO DE 2024.

PROBLEMAS

1. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \liminf_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{m}\right)^2 \right).$$

Indicación: aplicar el lema de Fatou.

(2 puntos)

2. Probar directamente a partir de la definición de medida e integral de Lebesgue[1] que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces para todo $t > 0$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x/t)dx.$$

(2,5 puntos)

3. Probar que si μ es absolutamente continua con respecto a $\mathcal{L}_n$ y $\lim_{t\to 0^+} r^{-n}\mu\left(B(x,r)\right) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $\mu = 0$.

(1,5 puntos)

4. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, y consideremos $K_r := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) = r\}$. Probar que para todo $r > 0$ se tiene $|K_r| = 0$.

(1,5 puntos)

[1] En particular, no puede usarse ni el teorema del cambio de variables, ni la fórmula del área, ni la de la coárea.