

TEORÍA DE LA MEDIDA. EXAMEN FINAL DEL 14 DE JUNIO DE 2024.

TEST TEÓRICO-PRÁCTICO

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Todos los borelianos de \mathbb{R}^2 son intersecciones numerables de abiertos o uniones numerables de cerrados.

2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible.

3. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y $|A| > 0$, entonces $f(A)$ es medible.

4. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable entonces $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ni A \mapsto \nu(A) := \int_A f(x)dx$ cumple que $\nu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$ para toda sucesión $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ con $A_{j+1} \subset A_j$ para todo j .

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_n^*(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$, entonces f es medible Lebesgue.

6. Toda función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es límite en casi todo punto de una sucesión de funciones continuas.

7. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y positiva en casi todo punto, entonces para todo $x_0 \in X$ y para todo $R > 0$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{X \cap B(x_0, R)} e^{-tf(x)} dx = 0.$$

8. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ es medible entonces su gráfica tiene medida cero en \mathbb{R}^3 .

9. Si $\mu(X) < \infty$ y una sucesión de funciones medibles $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge a una función medible f en casi todo punto, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

10. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces la función $F(x) = \int_{-\infty}^x f$ es diferenciable en casi todo punto.

Este test supone 2,5 puntos de la nota del examen. Cada pregunta acertada suma 0,25 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos. No hay que justificar ninguna respuesta.