PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 1.

1. Demostrar que son equivalentes: el principio de inducción, el de inducción completa, y el de buena ordenación de $\mathbb{N}$.

2. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números. Supongamos que (x_n) no converge a 0. Demostrar que entonces existen un número $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$|x_{n_j}| \geq \varepsilon_0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$.

4. Demostrar que la sucesión $(\frac{1}{n} + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ningún límite.

Indicación: encontrar dos subsucesiones que convergen a números diferentes. ¿Por qué esto es suficiente?

5. Demostrar que si (x_n) es una sucesión creciente y acotada superiormente entonces (x_n) es de Cauchy.

Indicación: sea M una cota superior de (x_n). Dividir el intervalo $I_0 := [x_1, M]$ en dos subintervalos de igual longitud, digamos $J_{0,1}$ y $J_{0,2}$, y observar que uno y sólo uno de ellos contiene infinitos términos de la sucesión. Denotar este subintervalo por I_1. Continuar el proceso.

6. Sea $a > 0$. Consideremos la sucesión definida recursivamente por $x_1 = 1$, y

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}.$$

Probar que $x_n^2 \geq a$ para todo $n \geq 2$, y usar esta desigualdad para demostrar que $x_n \geq x_{n+1}$ si $n \geq 2$. Concluir, usando un ejercicio anterior, que (x_n) es de Cauchy.

7. Tomando $a = 2$ en el problema anterior, observar que existen sucesiones de Cauchy de números racionales que no tienen límite en $\mathbb{Q}$.

8. Demostrar que la sucesión $\left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy.

9. Demostrar que si una sucesión (x_n) es de Cauchy y posee una subsucesión (x_{n_j}) que converge a un número x, entonces (x_n) converge a x.

10. Demostrar que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si la sucesión $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $k \in \mathbb{N}$.

11. Probar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ si $n \geq n_0$.

12. Dar un ejemplo de dos sucesiones divergentes cuya suma converja, y otro ejemplo de dos sucesiones divergentes tales que su producto converja.

13. Demostrar la desigualdad de Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ si $n \in \mathbb{N}$ y $x \geq -1$.

14. Demostrar las siguientes fórmulas:

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

15. Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $\lim_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{x, y\}$. Similarmente para el mínimo.

16. Si (x_n) es una sucesión convergente tal que $x_n \geq 0$ para todo n, demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$. Dar un ejemplo que pruebe que no se puede cambiar $\geq$ por $>$ en este resultado.

17. Si $x_n \leq y_n$ para todo n y las sucesiones (x_n) e (y_n) son convergentes, probar que $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

18. Sea (x_n) la sucesión definida recursivamente por $x_1 = 1$, y

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3) \text{ para } n \geq 1.$$

Demostrar que (x_n) es creciente y acotada. Concluir que es convergente, y hallar su límite.

19. Si $x, y \geq 0$ y $z_n = (x^n + y^n)^{1/n}$, demostrar que $m_{n\to\infty} z_n = \max\{x, y\}$.
Indicación: usar que $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$.

20. Estudiar la convergencia de las sucesiones siguientes:

$$x_n = \frac{n!}{n^n}, \quad y_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

21. Si $0 < y < 1$, probar que $\lim_{n\to\infty} y^n = 0$.

22. Sea r tal que $0 < r < 1$. Demostrar que $\sum_{j=1}^{n} r^j = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$. Concluir que

$$\sum_{j=1}^{\infty} r^j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} r^j = \frac{r}{1-r}.$$

23. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$x := n! \left(\frac{m}{n} - \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \right),$$

es un número entero. Ahora, dado $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \geq n + 1$, ver que

$$\frac{n!}{l!} \leq \frac{1}{(n+1)^{l-n}},$$

con desigualdad estricta si $l > n + 1$. Si además suponemos que $n \geq 2$, probar que

$$0 < n! \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} - \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \right) = n! \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{l!} < 1$$

24. Usando los problemas anteriores, definir el número $e := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}$, probar que $2 < e < 3$ y, razonando por reducción al absurdo, que e es un número irracional.