PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 2.

1. Sean $0 \leq a \leq b$. Demostrar que
$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

2. Usando la propiedad del supremo de $\mathbb{R}$ (y sin usar la construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$) demostrar que:

a) $\mathbb{N}$ no está acotado en $\mathbb{R}$ (propiedad arquimediana).

b) $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

3. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a \leq b$ para todos $a \in A$ y $b \in B$. demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que $\sup A \leq \inf B$

4. Hallar los supremos e ínfimos, si existen, de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$\{3 + \tfrac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}; \quad \{x \in \mathbb{R} \,:\, x + 3 > x^2\};$$
$$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, x \leq \tfrac{1}{x}\}; \quad \{x \in [0, \infty) \,:\, x^n < a\}.$$

5. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $a > 0$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ y $x^n = a$. Llamamos a este x la raíz enésima de a, y lo denotamos por $a^{1/n}$.

6. Demostrar que si A es un subconjunto no vacío y finito de $\mathbb{R}$ entonces A siempre contiene a $\sup A$. Probar que $\sup A = \max A$ en este caso.

7. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que están acotados superiormente, y definamos $A + B := \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

8. Enunciar y demostrar un resultado análogo para ínfimos.

9. Sin embargo, demostrar que en general *no es verdad que*, si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas superiormente definidas en un intervalo I no vacío de $\mathbb{R}$, se tenga siempre que
$$\sup_{x \in I} (f(x) + g(x)) = \sup_{x \in I} f(x) + \sup_{x \in I} g(x).$$
No obstante, probar que la desigualdad
$$\sup_{x \in I} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in I} f(x) + \sup_{x \in I} g(x)$$
sí que es siempre cierta.

10. Enunciar y demostrar un resultado análogo para ínfimos.

11. Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en A tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup A$.

12. Estudiar la posible convergencia de las siguientes sucesiones:
$$\frac{n^2}{n+3} \quad \frac{n^3}{n^3+3n+2} \quad \frac{\sqrt{n^3+2n}+n}{n^2+2} \quad \frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}$$
$$\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \quad \frac{n^2+(-1)^n n}{n} \quad \frac{2^n}{4^n-1} \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

13. Sea $a > 1$. Se define por recurrencia una sucesión poniendo $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a x_n}$. Probar que (x_n) es creciente y acotada, y hallar su límite

14. Se define por recurrencia $x_1 = a > 0$, y $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. ¿Es convergente la sucesión (x_n)?

15. Probar (por inducción y usando la fórmula del binomio) que

$$2^{n-1}(n!) \leq n^n \leq 3^{n-1}(n!)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

16. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$.

17. Sean $A \subset \mathbb{R}$, y α una cota superior de A. Demostrar que si $\alpha \in A$ entonces $\alpha = \sup A$.

18. Sean A, B subconjuntos no vacíos, y acotados superiormente, de $\mathbb{R}$. Demostrar que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

19. Sea A un subconjunto no vacío, y acotado, de $\mathbb{R}$, y sea B un subconjunto no vacío de A. Probar que $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$.

20. Sea A un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$, y sea $t > 0$. Definamos $tA = \{ta : a \in A\}$. Probar que $\sup(tA) = t \sup A$. ¿Qué ocurre si $t < 0$?

21. Sean (x_n), (y_n) sucesiones acotadas de números reales. Demostrar que

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

Dar un ejemplo en que la desigualdad sea estricta. ¿Qué ocurre con los límites inferiores?

22. Demostrar que si existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ y (b_n) es una sucesión acotada superiormente, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

23. Hallar los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

$$\frac{n^3}{(-1)^{n+6}n^3 + 3n + 2}, \quad \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 2}, \quad \frac{n^2 + (-1)^n n}{n}$$

24. Sea (x_n) la sucesión definida por $x_n = 1 + 1/n$ si n es par, $x_n = -1 + 1/n$ si n es primo impar, y $x_n = -2$ en cualquier otro caso. Calcular los límites superior e inferior de (x_n).

25. Sea (x_n) una sucesión acotada, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, y $\alpha = \sup A$. Supongamos que $\alpha \notin A$. Probar que existe una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) que converge a α.

26. Si (x_n) es una sucesión de números reales que no está acotada, demostrar que existe una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \infty$.

27. Supongamos que toda subsucesión de una sucesión (x_n) tiene a su vez otra subsucesión que converge a 0. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

28. Sean X e Y conjuntos no vacíos, y $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función acotada. Demostrar que

$$\sup_{y\in Y}\left(\inf_{x\in X} \varphi(x,y)\right) \leq \inf_{x\in X}\left(\sup_{y\in Y} \varphi(x,y)\right).$$

29. Si φ es como en el ejercicio anterior, demostrar que

$$\sup_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} \varphi(x,y)\right) = \sup_{x\in X}\left(\sup_{y\in Y} \varphi(x,y)\right) = \sup_{(x,y)\in X\times Y} \varphi(x,y).$$

Enunciar un resultado análogo para ínfimos.

30. Dar una demostración breve del teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones, usando la teoría de límites superiores (que a su vez utiliza sólo la propiedad del supremo de $\mathbb{R}$).

31. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, y definimos $c_n = a_n$ si n par, y $c_n = b_n$ si n impar, demostrar que $\limsup_{n\to\infty} c_n = \max\{a, b\}$. ¿Qué ocurre con $\liminf_{n\to\infty} c_n$?