PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 3.

1. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^{1/3}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+(-1)^n}{3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot 3n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{n}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\cos(n\pi)}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt{n+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\log n}{n(n+1)\sqrt{n}}.$$

2. Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos convergente a cero. Demostrar que existe al menos una subsucesión $\{c_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} < \infty$.

3. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes. Si $b_n > 0$ para todo n mayor o igual que cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r+a_n}$ en función de los valores de r.

4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen y $a_n, b_n > 0$ a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

5 (Representación binaria de los números reales)**.** Demostrar que cualquier número $x \in [0,1]$ puede escribirse en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n},$$

donde $b_n \in \{0,1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

6 (Representación decimal de los números reales)**.** Demostrar que cualquier número $x \in [0,1]$ puede escribirse en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

donde $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿Es única esta representación?

7. Calcular la suma de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

8. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge. Deducir que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

9. Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Probar que $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.
Indicación: usar que la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

10. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, ¿es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ siempre convergente? Y si además $a_n \geq 0$, ¿qué ocurre?

11. Encontrar una sucesión (a_n) tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n a_n$ converja.

12. Dar un ejemplo de sucesión (a_n) que converge a 0 y tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ diverge.

13. Demostrar que la suma $1 - 1/2 - 1/3 + 1/4 + 1/5 - 1/6 - 1/7 + ...$ converge.

14. ¿Converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$? ¿Y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)}$? ¿Y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^2}$?

15. Demostrar que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = 42$.

16. Usar el lema de Abel para demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Indicación: Considerar primero el caso en que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

17. Comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dada por

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + ...$$

tiene sumas parciales acotadas, su término general tiende a 0, y la serie no converge.

18. Probar el siguiente criterio de convergencia (de Raabe): si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y

$$\liminf_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por otro lado, si

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

19. Usar el criterio de Raabe para probar que, si $p, q > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)(p+2)...(p+n)}{(q+1)(q+2)...(q+n)}$$

converge para $q > p+1$, y diverge para $q \leq p+1$.

20. Demostrar que la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente.

21. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Indicación: usar que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} n^{-k}$ para probar que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Por otro lado usando de nuevo que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+N} = \sum_{k=0}^{n+N} \frac{(n+N)!}{(n+N-k)!\,k!} n^{-k}$, probar que , para todos $N, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N.$$

Tomar ahora límites de manera adecuada en n y N para concluir.