PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 4.

1. Utilizando directamente la definición de límite (*para todo* $\varepsilon > 0$ *existe...*), comprobar que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+3} = 1, \quad \lim_{x\to 1^+} (x-1)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2. Estudiar la existencia, y en su caso determinar los valores, de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x},$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x+2), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} \operatorname{sen}(x+2), \quad \lim_{x\to 1^+} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x-1}\right),$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x-1}\right), \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2^x}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{x^2+2}.$$

3. Estudiar la existencia de $\lim_{x\to\infty} P(x)/Q(x)$, donde P y Q son polinomios de grados n y m respectivamente, en función de los posibles valores de n, m.

4. Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ entonces existe $\lim_{x\to a} g(x)$.
b) Si no existen $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces tampoco existe $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$.
c) Si no existen $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces tampoco existe $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$.

5. Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$, y $\beta \neq 0$, probar que $\lim_{x\to 0} \frac{f(\beta x)}{x} = \alpha\beta$. ¿Qué ocurre si $\beta = 0$?

6. Asumiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, hallar los valores de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}.$$

7. Probar que si existe $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ entonces f está acotada en un intervalo abierto que contiene a x_0.

8. Si $f(x) \leq g(x)$, demostrar que $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$ siempre que ambos límites existan.

9. Dar versiones del problema anterior para límites laterales y límites en el infinito.

10. Encontrar las constantes a, b para las cuales se tiene que $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - ax - b = 0$.

11. Si P es un polinomio de grado par, demostrar que $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty = \lim_{x\to -\infty} P(x)$.

12. Si P es un polinomio de grado impar, demostrar que $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ y que $\lim_{x\to -\infty} P(x) = -\infty$.

13. Si $\lim_{x\to a^-} f(x) < \lim_{x\to a^+} f(x)$, demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(y)$ siempre que $a - \delta < x < a < y < a + \delta$.

14. Demostrar que si P es un polimomio entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{2^x} = 0$. Indicación: basta probar que $\lim_{k\to\infty} \frac{x^m}{2^x} = 0$ para cualquier m. Para ello, si (x_k) es una sucesión que tiende a ∞, encontrar números $n_k \in \mathbb{N}$ tales que $n_k \leq x_k < n_k + 1$, acotar la sucesión $x_k^m/2^{x_k}$ por una función adecuada de n_k, y recordar el criterio de la raíz para la convergencia de series. (Puede suponerse, sin demostración, que la función $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2^x$ esté definida y sea creciente.)

15. Demostrar que si dos funciones continuas $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tienen la propiedad de que $f(q) = g(q)$ para cada $q \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$, entonces $f = g$.

16. Demostrar que si dos funciones continuas $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tienen la propiedad de que $f(q) = g(q)$ para cada $q \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a,b)$, entonces $f = g$.

17. Probar que si f es continua en a y $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)$.

18. Dar un ejemplo que pruebe que el enunciado del problema anterior es falso si f no es continua en a.

19. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x < -1; \\ x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } -1 \leq x \leq 0; \\ x + a & \text{si } 0 < x < 3 \\ x^3 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

20. Demostrar que para cualquier función continua f definida en un intervalo $[a, b]$ siempre existe una función continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

21. Demostrar que el enunciado del problema anterior es falso si cambiamos $[a, b]$ por (a, b).

22. Demostrar que si f es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$ entonces f es estrictamente positiva en algún intervalo abierto que contiene a x_0.

23. Probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) > 0 > f(b)$ entonces $f\left(\sup\{x \in [a, b) : f(x) > 0\}\right) = 0$.

24. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) Si una función $f : \mathbb{R} \to R$ alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces f es continua.
b) Si una función $f : \mathbb{R} \to R$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$ entonces f es continua.
c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en 0 y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.
d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en 0 y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y, entonces f es lineal.

25. Dar un ejemplo de función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

26. Usando el teorema de Bolzano y el problema 12, demostrar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

27. Demostrar que para cada $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un único $x > 0$ tal que $x^n = a$.

28. Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, probar que existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

29. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in [a, b]$, ¿qué puede saberse de f?

30. Supongamos que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y tiene la propiedad de que $x^2 + f(x)^2 = 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Demostrar que entonces o bien $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in [-1, 1]$, o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

31. Si $f : [a, b] \to [a, b]$ es continua, demostrar que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

32. Demostrar que la ecuación $x - \operatorname{sen} x - 5 = 0$ tiene al menos una solución real.

33. Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio, demostrar que P alzanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

34. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, y $f(p/q) = 1/q$ si p, q son enteros primos entre sí, con $q \neq 0$. Demostrar que f es continua en cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y discontinua en cada $y \in \mathbb{Q}$.

35. Demostrar que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada valor.

36. Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua tal que $f(0) = f(1)$, demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún $x_n \in [0, 1]$ tal que $f(\frac{1}{n} + x_n) = f(x_n)$.