PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 5.

1. Estudiar la continuidad uniforme de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccc} f(x)=1/x, x\in[1,\infty); & f(x)=1/x, x\in(0,1); & f(x)=1/x^2, x\in(0,\infty); \\ f(x)=1/(1+x^2), x\in\mathbb{R}; & f(x)=\sin(1/x), x\in(0,\pi); & f(x)=x\sin(1/x), x\in(0,3) \\ f(x)=x\sin x, x\in\mathbb{R}; & f(x)=\frac{\sin x}{x}, x\in(0,1); & f(x)=x^{1/3}, x\in[0,\infty). \end{array}$$

2. Demostrar que si $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ es continua y existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y es finito, entonces f es uniformemente continua en $[a,\infty)$.

3. Demostrar que la suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua. ¿Qué ocurre con el producto?

4. Demostrar que la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

5. Demostrar que la suma de funciones de Lipschitz es de Lipschitz. ¿Qué ocurre con el producto?

6. Demostrar que la composición de funciones de Lipschitz es de Lipschitz.

7. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, y $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua. Probar que f es uniformemente continua en (a,b) si y sólo si existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)$ y son ambos finitos.

8. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, y $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Probar que f es uniformemente continua en (a,b) si y sólo si existe una extensión continua de f al intervalo cerrado $[a,b]$.

9. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, y $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f está acotada en (a,b).

10. Se dice que una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es *periódica* si existe un número $T>0$ tal que $f(x+T)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Demostrar que toda función periódica y continua es de hecho uniformemente continua y acotada en todo $\mathbb{R}$.

11. Sean $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[b,c)\to\mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas en $(a,b]$ y $[b,c)$ respectivamente, y supongamos que $f(b)=g(b)$. Demostrar que la función

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in(a,b], \\ g(x) & \text{si } x\in[b,c). \end{cases},$$

es uniformemente continua en (a,c).

12. Aplicar el ejercicio anterior para demostrar que la función $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}+\sqrt{x}$$

es uniformemente continua en $(,\infty)$.

13. Demostrar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y existen $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, y son ambos finitos, entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

14. Partiendo directamente de la definición, encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=1/x, x\neq 0;\quad f(x)=x^2;\quad f(x)=\sqrt{x}, x>0;\quad f(x)=x^3.$$

15. Probar que la función $f(x)=|x|^\alpha$ es derivable en 0 si y sólo si $\alpha>1$.

16. Demostrar que la derivada es un concepto *local*: si $f(x) = g(x)$ para todo x en un intervalo abierto alrededor de a, y g es derivable en a, entonces f también es derivable en a, y $f'(a) = g'(a)$.

17. Sea f la función definida por $f(x) = x^2$ cuando $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ cuando $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demostrar que f es derivable en 0 y calcular su derivada en este punto. Probar que en todos los demás puntos la función *no* es derivable.

18. Sea $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Probar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$. ¿Es f de Lipschitz en $[-1, 1]$?

19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es derivable en 0 y hallar su derivada en este punto.

20. Más en general, demostrar que si f, g, h son funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contenga a un punto a, $f(a) = h(a)$, y f y h son derivables en a, entonces g es también derivable en a (y además $g'(a) = f'(a) = h'(a)$).

21. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en sus dominios:

$$f(x) = |x| + |x-1|; \quad f(x) = 2x + |x+2|; \quad f(x) = x|x|; \quad f(x) = |\sin x|.$$

22. Demostrar que si f es derivable en a entonces $|f|$ también lo es siempre que $f(a) \neq 0$.

23. Demostrar que si f y g son derivables en a entonces $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ son derivables en a siempre que $f(a) \neq g(a)$.

24. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en a, con $f(a) = 0$. Probar que $g(x) = |f(x)|$ es derivable en a si y sólo si $f'(a) = 0$.

25. Demostrar que la derivada de una función par es una función impar; y la de una impar, una par.

26. Suponiendo que f es una función derivable en $\mathbb{R}$, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$g(x) = f(x+c); \quad h(x) = f(cx).$$

27. Demostrar que la derivada de una función periódica es periódica.

28. Sea f derivable en a. Probar que $f'(a) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

29. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccccc}
\sin(x+x^2), & \sin x + \sin x^2, & \sin(\cos(x)), & \sin(\sin(x)), & f(x) = \sin(\frac{\cos x}{x}), \\
\frac{\sin(\cos(x))}{x}, & \sin(x + \sin x), & \sin(\cos(\sin x)), & \frac{x^2-1}{1+x}, & \operatorname{arc\,tg}(\cos x + \sin x^2) \\
\frac{x^2+3x+2}{x^{10}+1}, & \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2+3)}{x^2+5}, & \sin((x+1)^2(x+2)), & \sin^3(x^2 + \sin x), & \sin((\sin^7 x^7 + 1)^7).
\end{array}$$

30. Hallar f' en función de g' si f está definida por cada una de estas expresiones:

$$g(x + g(a)); \quad g(xg(a)); \quad g(x + g(x)); \quad g(x)(x-a); \quad g(a)(x-a); \quad f(x+3) = g(x^2).$$

31. Probar que no existen funciones derivables f y g tales que $f(x)g(x) = x$ para todo x y $f(0) = g(0) = 0$.

32. Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para cierta función g continua en 0. Probar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

33. Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que existe una función g continua en 0 tal que $f(x) = xg(x)$. Indicación: ¿Qué ocurre si intentamos poner $g(x) = \frac{f(x)}{x}$?

34. Si $f + g$ es derivable en a, ¿son f y g necesariamente derivables en a? Si fg y f son derivables en a, ¿qué condiciones para f implican que g sea derivable en a?

35. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$\log(\tfrac{x^2+5}{x^6+3}); \quad \arccos x^4 + 5x + 3; \quad \arcsin(e^{x^2-\log x^2}); \quad \log^3 x^2; \quad \log(\log(\log(x)));$$
$$e^{\sin(x^2+\tan(x))}; \quad \tfrac{\sin^3(x^7+5)}{\log x+\cos x}; \quad \sin(\cos(\mathrm{tg}(\cos(\sin(x^{23}+12))))); \quad x^{x^2+5x+1}; \quad e^{x \sin x}.$$