PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 6.

1. Definamos $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Supongamos también que h y k son dos funciones tales que $h'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$, $h(0) = 3$, $k'(x) = f(x+1)$, y $k(0) = 0$. Hallar $(f \circ h)'(0)$, $(k \circ f)'(0)$, y $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x) = h(x^2)$.

2. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donde g es una función que cumple $g(0) = g'(0) = 0$.

3. Para cada una de las siguientes funciones, encontrar los extremos locales, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$$\begin{array}{ccc} f(x) = x^2 - 3x + 5 & f(x) = x^3 - 3x - 4 & f(x) = 3x - 4x^2 \\ f(x) = x^4 + 2x^2 - 4 & f(x) = x + \frac{1}{x} & f(x) = \frac{x}{1+x^2} \\ f(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2} & f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} & f(x) = \sin x^2 \end{array}$$

4. Hallar los extremos absolutos y los extremos locales de las funciones f en los intervalos indicados:

a) $f(x) = |x^2 - 1|$, $x \in [-4, 4]$;
b) $f(x) = 1 - (x-1)^{2/3}$, $x \in [0, 2]$;
c) $f(x) = x|x^2 - 12|$, $x \in [-2, 3]$;
d) $f(x) = \frac{x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, $x \in [0, 5]$.

5. Usar el teorema del valor medio para demostrar que las funciones $\sin$ y $\cos$ son 1-Lipschitz.

6. Usar el teorema del valor medio para demostrar que $\frac{x-1}{x} < \log x < x - 1$ para todo $x > 1$.

7. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua en (a, b) y derivable en $(a, b) \setminus \{x_0\}$, donde $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que existe $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \alpha$. Demostrar que entonces f es también derivable en x_0, y que $f'(x_0) = \alpha$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que f tiene un mínimo absoluto en 0, pero que su derivada f' toma valores estrictamente positivos y estrictamente negativos en cualquier intervalo de la forma $(0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, es decir, f no es creciente en ningún intervalo de la forma $(0, \varepsilon)$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que f es derivable en todos los puntos, $f'(0) > 0$, y que f no es creciente en ningún intervalo abierto que contenga a 0.

10. Demostrar que si f es derivable en (a, b), y su derivada f' es continua en un punto c de (a, b) tal que $f'(c) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que f es estrictamente creciente en $(c - \delta, c + \delta)$.

11. Sea $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivable en $(a, +\infty)$ y tal que existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \alpha$. Demostrar que:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = \alpha$ para todo $t > 0$.
b) Si existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y es finito, entonces $\alpha = 0$.
c) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$.

12. Sean f y g derivables, y supongamos que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \geq a$. Probar que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$.

13. Demostrar que la suma de un número positivo y su inverso es al menos dos.

14. Demostrar que si $f'(x) \geq M$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.

15. Supóngase que $f'(x) \geq M > 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud $1/4$ en el que se cumple que $|f| \geq M/4$.

16. Demostrar que si $f'(c) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)$ para todo $x \in (c, c + \delta)$. Demostrar también que si se supone $f'(c) < 0$ entonces puede encontrarse $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)$ para todo $x \in (c - \delta, c)$.

17. Utilizar el problema anterior para demostrar el *Teorema de Darboux*: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable y ζ es un número entre $f'(a)$ y $f'(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \zeta$ (es decir, toda derivada f' tiene la propiedad de los valores intermedios incluso cuando f' no sea continua). Indicación: analizar la función $g(x) := \zeta(x - a) - f(x)$, aplicándole el problema anterior para concluir que g alcanza su máximo en un punto c del interior de (a, b).

18. Utilizar la regla de l'Hôpital para calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{cccc}
\lim_{x\to0^+}(1+\frac{3}{x})^x, & \lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}, & \lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}, & \lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{\sin x}, \\
\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}, & \lim_{x\to0}\frac{\log(\cos x)}{x}, & \lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}, & \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}, \\
\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}, & \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\log^2 x}, & \lim_{x\to0^+}x^3\log x, & \lim_{x\to0^+}x^{2x}, \\
\lim_{x\to\infty}x^{1/x}, & \lim_{x\to0^+}x^{\sin x}, & \lim_{x\to0^+}(\sin x)^x, & \lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}).
\end{array}$$

19. Sea $f(0, \infty) \to \mathbb{R}$ derivable, y supongamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = L$. Probar que debe ser $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. *Indicación:* Escribir $f(x) = e^x f(x)/e^x$.

20. Sean $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$, y $g(x) = \sin x$. Probar que existen $\lim_{x\to0} f(x)$, $\lim_{x\to0} g(x)$ y $\lim_{x\to0} f(x)/g(x)$ y son todos cero, pero que $\lim_{x\to0} f'(x)/g'(x)$ no existe.

21. Demostrar que si f y g son convexas y g es creciente, entonces la composición $g \circ f$ es también convexa.

22. Representar gráficamente las siguientes funciones, hallando los intervalos en los que son convexas o cóncavas:

$$\begin{array}{ccc}
f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, & g(x) = \frac{x}{x^2-1}, & h(x) = x + \frac{3}{x^2}, \\
\varphi(x) = \frac{x^2}{x^2-1}, & \psi(x) = \frac{x^2+1}{x}, & u(x) = x\log x.
\end{array}$$

23. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa y no constante, probar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

24. Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+1} & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{1}{(1-x)(5-x)} & \text{si } 1 < x < 5, \\ \cos(5x-7) & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

25. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y acotada entonces existe una sucesión (x_n) tal que:

a) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, y

b) $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

26. Dar un ejemplo de función derivable y acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para la que no se tenga que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, pero sí que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

27. El paracaidista Felix Baumgartner sube en un globo a 39.000 metros de altitud y se deja caer libremente. Sabiendo que en los primeros 46,8 segundos de la caída recorre 10.000 metros, y que la aceleración de la gravedad a dicha altitud es de 9,7 $\mathrm{m/seg}^2$, demostrar que en algún instante entre $t = 0$ y $t = 46,8$ su velocidad es mayor que 340 $\mathrm{m/seg}$.