PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 7.

1. Calcular directamente (a partir de sumas superiores e inferiores, sin usar el teorema fundamental del cálculo) el valor de la integral $\int_0^b x^2 dx$.

2. Demostrar que la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ fracción irreducible,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

es integrable. *Indicación:* Para cada $\varepsilon > 0$ demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : x = \frac{p}{q}$ fracción irreducible , $\frac{1}{q} > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es finito, y utilizar este hecho para construir una partición P de $[0, 1]$ tal que $0 = L(f, P) \leq U(f, P) \leq \varepsilon$.

3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Probar que f no es integrable en $[0, 1]$. *Indicación:* probar que la integral superior es $1/2$ mientras que la integral inferior es 0.

4. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, $f \geq 0$ y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$ entonces $\int_a^b f > 0$.

5. Deducir que si f es continua y $\int_a^b |f| = 0$ entonces $f = 0$. Dar un ejemplo que muestre que esto en general es falso si se supone que f es integrable pero no continua.

6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y con la propiedad de que para toda función integrable $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es $\int_a^b fg = 0$. Probar que $f = 0$.

7. Sea $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función simétrica par (es decir $f(x) = f(-x)$ para todo x) e integrable, entonces $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$. Probar también que si f es integrable y simétrica impar (es decir $f(-x) = -f(x)$ para todo x) entonces $\int_{-a}^a f = 0$.

8. Probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y tiene solamente un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.

9. Dar un ejemplo de una función f que no es integrable en $[0, 1]$ pero su valor absoluto $|f|$ sí es integrable en $[0, 1]$

10. Si $a < b < c < d$ y f es integrable en $[a, b]$, demostrar que f es integrable en $[b, c]$.

11. Demostrar que si $h : (c, d) \to \mathbb{R}$ es convexa entonces para todo $x_0 \in (c, d)$ existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) \geq h(x_0) + \xi(x - x_0)$ para todo $x \in (c, d)$.
Indicación: valdrá cualquier número ξ entre $\lim_{x \to x_0^-} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$ y $\lim_{x \to x_0^+} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$. ¿Por qué existen estos límites?

12 (Desigualdad de Jensen)**.** Probar que si f es una función integrable en (a, b) y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa entonces se tiene que

$$h\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b h(f(t))dt. \tag{12.1}$$

Indicación: Considerar $x_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ y $x = f(t)$ en la desigualdad del problema anterior e integrar de manera adecuada para concluir.

13 (Desigualdad de Young)**.** Probar que dados $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, se tiene que para cualesquiera $x, y > 0$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Indicación: observar que la función e^x es convexa y que $xy = e^{\frac{\log(x^p)}{p}+\frac{\log(y^q)}{q}}$.

14 (Desigualdad de Hölder)**.** Usando el ejercicio anterior, probar que dadas dos funciones f y g continuas, y números $1 < p, q < \infty$ tales que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se tiene que

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{14.1}$$

Para ello:

(i) Considerar primero el caso en que alguna de las integrales $\int_a^b |f(t)|^p dt$ o $\int_a^b |g(t)|^q dt$ sea cero.

(ii) Suponer que $\int_a^b |f(t)|^p dt \neq 0 \neq \int_a^b |g(t)|^q dt$ y utilizar la desigualdad del ejercicio anterior para ciertos x, y adecuados dependientes de $f(t)$ y $g(t)$. Finalmente integrar en la desigualdad resultante para concluir.

15. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, y sea $g : [c, d] \to [a, b]$ derivable. Consideremos $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt.$$

Probar que

$$G'(x) = f(g(x))g'(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

16. Hallar las derivadas de las sigientes funciones:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}dt \qquad G(x) = \int_a^{\int_1^x \sin^3 t dt} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2} dt$$
$$\varphi(x) = \int_a^{x^3} \cos^3(t)dt \qquad \psi(x) = \int_{15}^{x} \Big(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt\Big) dy.$$

17. Hallar las áreas de las regiones limitadas por:

a) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$.

b) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

c) Las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal y la recta vertical por $(2, 0)$.

18. Hallar $\int_a^b \big(\int_c^d f(x)g(y)dy\big) dx$ en términos de $\int_a^b f$ y $\int_c^d g$.

19. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $g \leq f$ y $\int_a^b f - \int_a^b g \leq \varepsilon$. *Indicación:* obtener primero una función escalonada, es decir, constante a trozos, con esta propiedad y obtener g a partir de ella. Hacer un dibujo.

20. Hallar una función continua f que satisfaga

$$\int_0^x f = f(x)^2 + C.$$

21. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, demostrar que existe un $x \in [a, b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$.