PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. HOJA 8.

1. Hallar funciones g tales que

a) $\int_0^x tg(t)dt = x + x^2$.

b) $\int_0^{x^2} tg(t)dt = x + x^2$.

2. Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$. *Indicación:* la solución *no* es $xf(x)$; hay que manipular la integral antes de tratar de hallar F'.

3. Demostrar que si h es continua y f y g son derivables, y

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

entonces $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$.

4. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{x^5}{7}dx \qquad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad \int sen(x)\cdot e^{cox}dx$$

$$\int \sqrt[3]{x}dx \qquad \int \frac{\cos(tg(x))}{\cos^2(x)}dx \qquad \int x\cdot\cos(5x^2-1)dx$$

$$\int 7(3x-2)^3dx \qquad \int (x^2+1)\cdot\cos(x^3+3x)dx \qquad \int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{5}{x-2}dx \qquad \int \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}} \qquad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$\int \frac{e^{2x-1}}{3}dx \qquad \int 5x\cdot(3x^2-4)dx \qquad \int x^4+3\cdot sen(x)dx$$

$$\int \frac{dx}{1+(2x)^2} \qquad \int \frac{5}{x^4}dx \qquad \int \frac{sen(Ln(x))}{x}dx$$

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6}dx \qquad \int \frac{1}{3+x^2}dx \qquad \int e^x\cdot\cos(e^x)dx$$

$$\int \frac{1}{25+x^2}dx \qquad \int \frac{1+2x}{1+x^2}dx \qquad \int \frac{dx}{1+(3x-2)^2}$$

$$\int \frac{dx}{4+5x^2} \qquad \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

$$\int \frac{2x+1}{16+x^2}dx \qquad \int \frac{dx}{arctg(x)\cdot(x^2+1)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2+2x+1} \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-(3x^2-2)^2}}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx \qquad \int \frac{x+1}{x^2+25}dx$$

$$\int x^2(x^3-5)^5dx \qquad \int \frac{2}{e^{3x}}dx \qquad \int tg(x)dx$$

$$\int \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \int \frac{2}{x\cdot\log(x)}dx \qquad \int \frac{sen(x)+\cos(x)}{sen(x)-\cos(x)}dx$$

5. Hallar las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\int \tfrac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx \quad \int \tfrac{x^3+7x^2+5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}dx \int \tfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1} \quad \int \tfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}dx.$$

6. Calcular las siguientes integrales:

$$\int \log\sqrt{1+x^2}dx \quad \int \tfrac{x^2-1}{x^2+1}\tfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \quad \int \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx \quad \int \log(x+\sqrt{x})dx$$
$$\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}dx \quad \int \sqrt{1-\operatorname{sen}x}dx \quad \int \operatorname{sen}\sqrt{x+1}dx \quad \int \tfrac{\sqrt{x^3-2}}{x}dx.$$

7. Usando integración por partes, demostrar las fórmulas de reducción:

a) $\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x dx$
b) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx$
c) $\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx.$

8. Calcular la longitud de las gráficas de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a) $f(x)=\sqrt{1-3x^2}$, $x\in[-\sqrt{3}/3,+\sqrt{3}/3]$;
b) $f(x)=x^3+\frac{1}{12x}$, $x\in[1,2]$;
c) $f(x)=\log x$, $x\in[1,e]$.

9. Demostrar que la longitud de la gráfica de $f(x)=x\operatorname{sen}(1/x)$ para $x\in(0,1]$, $f(0)=0$, es infinita.

10. Demostrar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Lipschitz entonces su gráfica tiene longitud finita.

11. Decir cuáles de las siguientes integrales impropias son convergentes:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x+\tfrac{1}{x})dx \quad \int_0^1 \operatorname{sen}^2(x+\tfrac{1}{x})dx \quad \int_1^\infty \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})dx \quad \int_1^\infty \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{x})dx.$$

12. Calcular la integral impropia $\int_0^1 \log x dx$.

13. Demostrar que la integral impropia $\int_0^\pi \log(\operatorname{sen}x)dx$ es convergente. Para calcular su valor, proceder como sigue:

a) Utilizar la sustitución $x=2u$ para demostrar que

$$\int_0^\pi \log(\operatorname{sen}x)dx = 2\int_0^{\pi/2}\log(\operatorname{sen}x)dx + 2\int_0^{\pi/2}\log(\cos x)dx + \pi\log 2.$$

b) Calcular $\int_0^{\pi/2}\log(\cos x)dx$.
c) Usando la igualdad $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)$, calcular $\int_0^\pi \log(\operatorname{sen}x)dx$.

14. Demostrar que si $f(x)=\int_0^x f(t)dt$, entonces $f=0$.

15. Demostrar que si f es continua y $f(x+y)=f(x)f(y)$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$, entonces o bien es $f=0$ o bien $f(x)=a^x$ para todo x, donde $a=f(1)$. *Indicación:* Demostrar primero que esto es así para todos los $x\in\mathbb{Q}$.