

# **Introducción a la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**

**Daniel Azagra Rueda**

**DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**Septiembre de 2018**

**Revisado por última vez: octubre de 2020**



# Índice general

<b>1. La ecuación autónoma unidimensional</b>	<b>5</b>
1.1. Problemas . . . . .	7
<b>2. Existencia, unicidad, y dependencia de la condición inicial</b>	<b>11</b>
2.1. El teorema de punto fijo para aplicaciones contractivas . . . . .	12
2.2. Integración de funciones con valores en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	14
2.3. Existencia y unicidad del problema de valor inicial en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
2.4. Dependencia de la condición inicial. Desigualdades de Gronwall. . . . .	16
2.5. Dependencia continua respecto de parámetros . . . . .	18
2.6. Existencia y Lipschitzianidad local del flujo . . . . .	20
2.7. El teorema de diferenciabilidad del flujo . . . . .	22
2.8. Problemas . . . . .	25
<b>3. Existencia y prolongabilidad de soluciones.</b>	<b>29</b>
3.1. Compacidad en espacios de funciones. Teorema de Arzela-Ascoli. . . . .	29
3.2. El método de Euler y el teorema de Peano. . . . .	33
3.3. Prolongabilidad de soluciones . . . . .	36
3.4. Estabilidad del intervalo de definición respecto de las condiciones iniciales . . . . .	40
3.5. Existencia de soluciones globales . . . . .	41
3.6. Problemas . . . . .	42
<b>4. Repaso de la teoría de ecuaciones lineales</b>	<b>45</b>
4.1. Normas y convergencia en el espacio de operadores lineales (o de matrices). . . . .	45
4.2. Sistemas lineales autónomos. Exponencial de una matriz. . . . .	45
4.3. Un teorema de Liouville . . . . .	48
4.4. Sistemas lineales con coeficientes no constantes . . . . .	49
4.5. Problemas . . . . .	52
<b>5. El flujo de un sistema autónomo</b>	<b>57</b>
5.1. Sistemas dinámicos . . . . .	57
5.2. El flujo de un sistema autónomo. Propiedades . . . . .	57
5.3. Órbitas, puntos de equilibrio, diagramas de fases . . . . .	63
5.4. Integrales primeras de un campo . . . . .	65
5.5. Reparametrización . . . . .	66
5.6. Problemas . . . . .	68
<b>6. Sistemas conjugados. Clasificación de los flujos lineales</b>	<b>73</b>
6.1. Cambios de coordenadas y campos conjugados . . . . .	73
6.2. Estructura local de las órbitas cerca de un punto regular . . . . .	76
6.3. Clasificación topológica de los flujos lineales hiperbólicos . . . . .	77
6.4. Problemas . . . . .	82

<b>7. Estabilidad de los sistemas no lineales</b>	<b>85</b>
7.1. Estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema autónomo . . . . .	85
7.2. Sumideros no lineales. El principio de linealización . . . . .	86
7.3. Ejemplo: el péndulo con rozamiento . . . . .	92
7.4. Variedades estable e inestable . . . . .	93
7.5. Problemas . . . . .	95
<b>8. Estabilidad por el método de Liapunov. Conjuntos límite</b>	<b>97</b>
8.1. Teoremas de estabilidad de Liapunov . . . . .	97
8.2. Conjuntos invariantes y conjuntos límite . . . . .	102
8.3. Estabilidad de compactos invariantes . . . . .	105
8.4. Problemas . . . . .	107
<b>9. Sistemas planos. Teorema de Poincaré-Bendixson.</b>	<b>115</b>
9.1. La aplicación de Poincaré . . . . .	115
9.2. Sistemas planos. El teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	116
9.3. Problemas . . . . .	120
<b>A. Apéndice: Funciones de Lipschitz</b>	<b>123</b>
A.1. Propiedades generales de las funciones de Lipschitz . . . . .	123
A.2. Estimación de la constante de Lipschitz por medio de la derivada . . . . .	125
A.3. Cálculo de la norma de una aplicación lineal . . . . .	128
<b>Bibliografía</b>	<b>131</b>

# Capítulo 1

## La ecuación autónoma unidimensional

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

donde  $f$  está definida en un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y toma valores en  $\mathbb{R}$ . Una solución de (1.1) es una función real  $x(t)$ , derivable en un intervalo de  $\mathbb{R}$ , que satisface la igualdad (1.1).

Cuando la función  $f$  no depende explícitamente de  $t$  (es decir, si  $f(t, x) = g(x)$  para todo  $(t, x)$  y cierta función  $g$ ) se dice que la ecuación (1.1) es *autónoma*. En este capítulo estudiaremos el *problema de Cauchy* para la ecuación autónoma unidimensional,

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde  $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida en un intervalo  $U$ , y  $x_0 \in U$ .

Es inmediato probar que si  $x(t)$  es solución de  $x' = f(x)$ , entonces la función  $y(t) = x(t - a)$  es también una solución, sea cual sea  $a$ . Por tanto basta estudiar el problema de valor inicial (1.2) para el tiempo inicial  $t_0 = 0$ .

**Ejemplo 1.0.1.** La propiedad anterior falla, en general, para la ecuación (1.1). Considérese por ejemplo la ecuación  $x'(t) = tx(t)$ .

**Definición 1.1.** Una *solución estacionaria*, o *punto de equilibrio*, de la ecuación

$$x'(t) = f(x(t))$$

es una solución que verifica  $x(t) = x_0$  (constante) para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Observación 1.1.** Es claro que una condición necesaria para que una solución  $x(t)$  sea estacionaria es que el punto  $x(0) = x_0$  satisfaga  $f(x_0) = 0$ . En tal caso también se dice que  $x_0$  es un *punto crítico*, o un *punto de equilibrio* de la ecuación. Esta condición será también suficiente si ya sabemos que el problema (1.2) tiene solución única. Pero como veremos dentro de poco, si sólo se pide que  $f$  sea continua, puede existir más de una solución de (1.2).

A continuación probaremos que la continuidad de  $f$  basta para asegurar la existencia de alguna solución de (1.2).

**Teorema 1.2.** Si  $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

tiene al menos una solución definida en un intervalo abierto  $I$  que contiene a 0. Dicha solución viene dada por:

- si  $f(x_0) \neq 0$ ,

$$x(t) = F_{x_0}^{-1}(t), \text{ siendo } F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(y)} dy;$$

además el número  $\int_{x_0}^x 1/f(y)dy$  puede interpretarse como el tiempo que tarda una solución en llegar desde el punto  $x_0$  hasta  $x$  (o viceversa, si cambiamos el signo).

- si  $f(x_0) = 0$ ,

$$x(t) = x_0.$$

*Demostración.* Se reduce a una comprobación inmediata que se deja al cuidado del lector (basta usar la regla de derivación de la función inversa y el teorema fundamental del cálculo).

Resulta también instructivo explicar cómo se ha llegado a la fórmula del primer caso: si  $f(x_0) \neq 0$  y suponemos que existe una solución  $x(t)$ , puesto que  $f$  es continua y  $f(x_0) \neq 0$ , existe un entorno de  $x_0$  en el que  $f$  es estrictamente positiva o estrictamente negativa; supongamos por ejemplo que  $f(y) > 0$  en  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . Al ser  $x(t)$  también continua, existe  $\delta > 0$  tal que  $x(s) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  si  $|s| < \delta$ , y entonces podemos escribir

$$\frac{x'(s)}{f(x(s))} = 1$$

para todo  $s \in (-\delta, \delta)$ , lo cual implica que

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(y)} dy = \int_0^t \frac{x'(s)}{f(x(s))} ds = \int_0^t 1 ds = t$$

donde hemos usado el teorema del cambio de variable en la primera igualdad. Observando que la función

$$F(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{f(y)} dy$$

es estrictamente creciente en  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  (ya que  $f$  es estrictamente positiva en este intervalo), deducimos que  $F$  tiene una inversa, y que

$$x(t) = F^{-1}(t)$$

para cada  $t \in (-\delta, \delta)$ . □

**Corolario 1.3.** Sean  $x_1, x_2$  dos soluciones de la ecuación autónoma  $x'(t) = f(x(t))$  (donde  $f$  es continua), definidas respectivamente en intervalos  $I_1, I_2$ , y supongamos que  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  para cierto  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ . Si las derivadas de  $x_1$  y  $x_2$  no se anulan en  $I_1 \cap I_2$  (es decir  $f(x_i(t)) \neq 0, t \in I_1 \cap I_2, i = 1, 2$ ), entonces necesariamente las dos soluciones coinciden en  $I_1 \cap I_2$ .

*Demostración.* Esto se deduce de la observación realizada, en la demostración del teorema anterior, acerca del procedimiento que nos permite obtener la fórmula para la solución  $x(t)$  en el caso en que  $f(x_0) \neq 0$ . □

En particular esto basta para establecer la unicidad de soluciones para (1.2) en el caso en el que  $f$  no se anule. Más aún, si para todo  $c$  que sea punto de equilibrio de  $f$  se sabe que la solución estacionaria es la única que pasa por  $c$ , podremos asegurar que, para todo dato inicial  $x_0$ , la solución de (1.2) es única. Si  $c$  es un punto de equilibrio aislado, podemos afinar más.

**Teorema 1.4.** Sea  $c$  un punto de equilibrio aislado de  $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $U$  es abierto y  $f$  es continua. Entonces se presentan dos posibilidades:

1. Si la integral

$$\int_x^c \frac{1}{f(y)} dy$$

es finita para algún  $x$  suficientemente cerca de  $c$  para que  $f(y)$  no se anule entre  $x$  y  $c$ , entonces existe una solución de  $x' = f(x)$ , distinta a la estacionaria, que pasa por el punto  $c$ .

2. Si, por el contrario,  $\left| \int_x^c \frac{1}{f(y)} dy \right| = \infty$  para todo  $x \neq c$  en un entorno de  $c$  donde  $f$  no se anula, entonces el problema de valor inicial  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = c$ , posee una única solución (que es, obviamente  $x(t) = c$  para todo  $t$ ).

En resumen, si hay una solución que llega en tiempo finito a un punto de equilibrio  $c$  desde otro punto, entonces no hay solución única de  $x'(t) = f(x(t))$ ,  $x(0) = c$ ; mientras que, si todas las soluciones con condición inicial cercana a  $c$  tardan un tiempo infinito (o bien cuando  $t \rightarrow +\infty$  o bien cuando  $t \rightarrow -\infty$ ) en llegar a  $c$ , entonces la solución estacionaria es la única solución de este problema.

*Demostración.* (1) En efecto, como  $c$  es aislado y  $f$  es continua existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x)$  es no nulo y tiene signo constante en  $(c - \delta, c)$ , por un lado, y en  $(c, c + \delta)$  por otro (el signo de  $f$  puede cambiar de uno de estos intervalos al otro, pero no dentro de uno cualquiera de ellos). Así, la función dada por  $\varphi(t) = F_{x_0}^{-1}(t)$ , donde  $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x 1/f$ , está bien definida para  $t$  entre 0 y  $t_0 := F_{x_0}(c)$ , que es finito por hipótesis. Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} F_{x_0}^{-1}(t) = c, \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi'(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{F'_{x_0}(\varphi(t))} = f(c) = 0, \end{aligned}$$

con lo que, si por ejemplo  $t_0 > 0$ , entonces

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t_0 + t), & \text{si } t \in (-t_0, 0), \\ c, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

es una función derivable que satisface la ecuación  $x'(t) = f(x(t))$  y la condición inicial  $x(0) = c$ .

(2) Supongamos que exista una solución  $y : [-a, a] \rightarrow U$ , distinta de la estacionaria, con  $y(0) = c$ . Sean  $\alpha := \inf\{t \in [-a, 0] : \forall s \in [t, 0] y(s) = c\}$ , y  $\beta := \sup\{t \in [0, a] : \forall s \in [0, t] y(s) = c\}$ . Obviamente  $-a \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq a$ , y puesto que  $y(t)$  no es constantemente  $c$ , se tiene que  $\alpha > -a$  o  $\beta < a$ . Supongamos por ejemplo  $\beta < a$  (el razonamiento es análogo en el otro caso). Por definición de  $\beta$  y continuidad de  $y(t)$ , se tiene  $y(t) = c$  para todo  $t \in [0, \beta]$ . Afirmamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(y(t)) \neq 0$  si  $t \in (\beta, \beta + \varepsilon]$ . En efecto, de lo contrario existiría una sucesión  $t_k \searrow \beta$  tal que  $f(y(t_k)) = 0$ , y por tanto, sin pérdida de generalidad,  $y(t_k) = c$  para todo  $k$ , ya que  $c$  es un cero aislado de  $f$  e  $y(t)$  es continua en  $\beta$ ; además, por definición de  $\beta$  también existiría una subsucesión de  $(t_k)$ , que para no sobrecargar la notación seguimos denotando  $(t_k)$ , tal que para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe  $\gamma_k \in (t_{k+1}, t_k)$  tal que  $y(\gamma_k) \neq c$ . Denotando  $\alpha_k := \inf\{t \in [t_{k+1}, \gamma_k] : \forall s \in [t, \gamma_k] y(s) \neq c\}$ ,  $\beta_k := \sup\{t \in [\gamma_k, t_k] : \forall s \in [\gamma_k, t] y(s) \neq c\}$  tendríamos  $y(\alpha_k) = c = y(\beta_k)$ ,  $\alpha_k < \beta_k$ , e  $y(t) \neq c$  si  $t \in (\alpha_k, \beta_k)$ . Pero entonces por el teorema de Rolle  $y'(s_k) = 0$  para algún  $s_k \in (\alpha_k, \beta_k)$ , luego  $f(y(s_k)) = 0$ , y así  $f$  tiene un cero en un punto  $y(s_k) \neq c$ , que está arbitrariamente próximo a  $c$  para  $k$  suficientemente grande, por lo que concluiríamos que  $c$  no es un cero aislado de  $f$ . Por tanto, debe existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(y(t)) \neq 0$  si  $t \in (\beta, \beta + \varepsilon]$ .

Luego  $z(t) := y(t + \beta + \varepsilon)$  es solución del problema  $\{z'(t) = f(z(t)), z(0) = y(\beta + \varepsilon)\}$ , y tiene la propiedad de que  $f(z(t)) \neq 0$  si  $t \in (-\varepsilon, 0]$ , y  $z(-\varepsilon) = c$ . Entonces, para  $t \in (-\varepsilon, 0]$ , por lo visto en el Teorema 1.2, se tiene  $z(t) = F_{y(\beta+\varepsilon)}^{-1}(t)$ . Pero

$$-\varepsilon = \lim_{t \rightarrow -\varepsilon^+} F_{y(\beta+\varepsilon)}(z(t)) = \lim_{t \rightarrow -\varepsilon^+} \int_{y(\beta+\varepsilon)}^{z(t)} \frac{1}{f} = \int_{y(\beta+\varepsilon)}^c \frac{1}{f},$$

con lo que esta integral no podría ser infinita. Por tanto, debe ser  $\beta = a$ . □

## 1.1. Problemas

**Problema 1.1.** Estudiar la existencia (local y global) y la unicidad de los siguientes problemas de valor inicial:

1.  $x'(t) = a x(t)$ ,  $x(0) = x_0$ ;
2.  $x'(t) = x(t)^2$ ,  $x(0) = x_0$ ;
3.  $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$ ,  $x(0) = x_0$ .

Identificar ejemplos de las siguientes situaciones:

- existe solución localmente, pero no globalmente;
- existen infinitas soluciones, y por tanto no hay unicidad;
- existe solución global y es única.

En todos los ejemplos precedentes la función  $f$  que define la ecuación es continua. En general, si  $f$  no es continua, no hay garantía de que exista alguna solución, como muestra el ejercicio siguiente.

**Problema 1.2.** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $g(x) = 1$  si  $x \geq 0$ , y  $g(x) = -1$  si  $x < 0$ . Probar que no existen soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t)), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

que estén definidas en un entorno de 0.

**Problema 1.3.** Sea  $f \in C^1(U)$ , y sean  $c$  un cero de  $f$  y  $x > c$  tales que  $f(y) \neq 0$  para  $y \in (c, x)$ . Probar que entonces

$$\int_c^x \frac{1}{f(y)} dy = \pm\infty.$$

Concluir que si  $f$  es de clase  $C^1$  y tiene ceros aislados entonces (1.3) tiene solución única.

**Problema 1.4.** Sea  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable tal que

$$u'(t) \leq a u(t)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Probar que entonces

$$u(t) \leq e^{a(t-t_0)} u(t_0)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

Indicación: considerar la función  $v(t) = u(t)e^{-at}$  y comprobar que su derivada es negativa.

**Problema 1.5** (desigualdad de Gronwall, versión unidimensional). Sea  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable tal que

$$|x'(t)| \leq a |x(t)|, \quad t \in [t_0, t_1]$$

para cierta constante  $a > 0$ . Entonces

$$|x(t)| \leq e^{a(t-t_0)} |x(t_0)|$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

Indicación: aplicar el ejercicio anterior a la función  $u(t) = |x(t)|^2$ .

**Problema 1.6** (Unicidad local). Si  $f$  es localmente Lipschitz entonces, para todo  $x_0 \in U$ , las soluciones del p.v.i. (1.3) son localmente únicas (en el sentido de que si dos soluciones de  $x' = f(x)$  coinciden en un  $t_0$  entonces son iguales en el intervalo común en que ambas estén definidas).

Indicación: si  $x_1, x_2$  son dos tales soluciones, aplicar la desigualdad de Gronwall a  $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ .



**Problema 1.7.** Encontrar una fórmula para las soluciones de la ecuación de variables separadas

$$x'(t) = g(t)f(x(t)),$$

donde  $g$  y  $f$  son continuas.

**Problema 1.8.** Resolver la ecuación  $x'(t) = g(t) \tan x(t)$ .

**Problema 1.9.** Resolver la ecuación lineal homogénea

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in I \end{cases}$$

siendo  $a$  una función continua definida en un intervalo  $I$ .

**Problema 1.10.** Resolver la ecuación  $x'(t) = \sin(t)x(t)$ .

**Problema 1.11.** Usando el método de *variación de las constantes*, resolver la ecuación lineal no homogénea

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in I, \end{cases}$$

donde  $a, b \in C(I)$ . Probar que la solución es única.

**Problema 1.12.** Supongamos que  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es periódica de período  $T > 0$ , y consideremos la ecuación

$$x'(t) = a(t)x(t).$$

Para  $t \in \mathbb{R}$  escribamos  $t = kT + \tau$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\tau \in [0, T)$ . Probar que toda solución de esta ecuación satisface

$$x(t) = e^{k\langle a \rangle} x(\tau), \text{ donde } \langle a \rangle = \int_0^T a(s) ds.$$

Probar además que:

1. Si  $\langle a \rangle < 0$  entonces toda solución tiende, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a la solución estacionaria.
2. Si  $\langle a \rangle > 0$  entonces toda solución distinta de la estacionaria tiende a  $\pm\infty$ .
3. Si  $\langle a \rangle = 0$  entonces todas las soluciones son periódicas de período  $T$ .



## Capítulo 2

# Problemas de valor inicial en $\mathbb{R}^n$ . Existencia, unicidad, y dependencia de la condición inicial.

En este capítulo estudiaremos condiciones sencillas bajo las cuales un problema del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

tiene solución única. Aquí  $f$  es un campo vectorial en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es decir una función  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $U$  es un conjunto abierto. Esta es una manera concisa de escribir un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, si  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , donde  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ , y si escribimos  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , entonces la ecuación anterior es exactamente lo mismo que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

con las correspondientes condiciones iniciales  $x_1(t_0) = x_{0,1}, \dots, x_n(t_0) = x_{0,n}$ . Más en general, puede considerarse una función  $f : I \times U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que dependa también de  $t$ , dando lugar a la ecuación

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

En realidad este tipo de ecuación es de nuevo equivalente a (2.3), puesto que podemos añadir la ecuación  $s'(t) = 1$  al sistema, obteniendo un sistema de ecuaciones en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la forma

$$(s'(t), x'(t)) = (1, f(s(t), x(t))),$$

que vuelve a ser una *ecuación autónoma*, es decir, del tipo (2.3) en un espacio de dimensión una unidad mayor.<sup>1</sup>

Este tipo de sistemas engloba también el de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $n \geq 2$ ; en efecto, una ecuación diferencial del tipo

$$x^{(n)}(t) = g\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right)$$

---

<sup>1</sup>No obstante, para algunas cuestiones finas, por ejemplo la estimación precisa del intervalo de existencia de una solución, a veces es conveniente considerar específicamente ecuaciones no autónomas, es decir del tipo  $x'(t) = f(t, x(t))$ .

es equivalente al sistema de  $n + 1$  ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = g(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

En este capítulo veremos cómo una condición local de tipo Lipschitz sobre la función  $f$  basta para garantizar la existencia y unicidad de una solución de (2.3), y por tanto las de cualquiera de estos sistemas. Estudiaremos también la dependencia de la solución respecto de la condición inicial  $x_0$ ; por ejemplo demostraremos que si  $f$  es de clase  $C^k$  entonces la solución depende  $C^k$ -diferenciablemente de la condición inicial. Finalmente probaremos resultados análogos para el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), \lambda) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro. En particular veremos que la solución depende  $C^k$ -diferenciablemente del parámetro si  $f$  es de clase  $C^k$ .

El instrumento principal para demostrar estos resultados será el teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas en espacios métricos completos, que recordamos a continuación.

## 2.1. El teorema de punto fijo para aplicaciones contractivas

**Definición 2.1.** Sea  $X$  un espacio vectorial real. Se dice que una aplicación  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  es una *norma* en el espacio vectorial  $X$  si satisface las siguientes propiedades:

1.  $\|x\| > 0$  si  $x \neq 0$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (propiedad triangular)
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

para todo  $x, y \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Toda norma en un espacio vectorial define una distancia entre puntos de dicho espacio:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

que tiene las propiedades

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetría)
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (propiedad triangular).

Cuando el espacio métrico  $(X, d)$  así obtenido es completo (es decir, toda sucesión de Cauchy en  $X$  es convergente), se dice que el espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un *espacio de Banach*.

**Proposición 2.1.** Sea  $I = [a, b]$  un intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$ , y consideremos el espacio vectorial de las funciones continuas de  $I$  en  $\mathbb{R}^n$ , que denotaremos  $C(I, \mathbb{R}^n)$ , con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{\|x(t)\| : t \in I\}.$$

El espacio  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.* Que  $\|\cdot\|_\infty$  es una norma en  $C(I, \mathbb{R}^n)$  es fácil de demostrar, y se deja como ejercicio. Veamos que el espacio resultante es completo. Obsérvese primero que, para toda sucesión  $(x_k) \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ , se tiene que la sucesión de números reales  $\|x_k - x\|$  converge a cero si y sólo si la sucesión de funciones  $(x_k)$  converge uniformemente a la función  $x$ . Así pues, dada una sucesión de Cauchy  $(x_k)$  en  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ , tenemos que encontrar una función continua  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $(x_k)$  converge uniformemente a  $x$ . Al ser  $(x_k)$  de Cauchy sabemos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $k, j \geq k_0$  entonces

$$\|x_k(t) - x_j(t)\| \leq \varepsilon \quad (2.4)$$

para todo  $t \in I$ . Esto en particular implica que, para cada  $t \in I$ , la sucesión  $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\mathbb{R}^n$  es completo, para cada  $t$  existe un vector, que vamos a denotar  $x(t)$ , al que converge esta sucesión; es decir, tenemos que existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) := x(t),$$

para cada  $t \in I$ . Entonces, tomando límites cuando  $j$  tiende a infinito en (2.4), y usando la continuidad de la norma en  $\mathbb{R}^n$ , obtenemos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq k_0$  entonces

$$\|x_k(t) - x(t)\| \leq \varepsilon \quad (2.5)$$

para todo  $t \in I$ . Esto significa que la sucesión de funciones  $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a la función  $x(t)$ , uniformemente en  $t \in I$ , y sabemos (hágase el problema 2.1 si no se sabe) que entonces la función  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua. Por tanto tenemos todo lo que deseamos.  $\square$

**Definición 2.2.** Se dice que una aplicación  $F$  de un espacio métrico  $X$  en sí mismo es *contractiva* si es  $\lambda$ -Lipschitz para algún  $\lambda \in [0, 1)$ , es decir si existe algún  $\lambda \in [0, 1)$  tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

para todo  $x, y \in X$ .

**Teorema 2.2** (de la aplicación contractiva). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo, y sea  $F : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva (con constante de Lipschitz  $L \in [0, 1)$ ). Entonces existe un único punto fijo  $x_\infty \in X$  (es decir un único punto  $x_\infty \in X$  tal que  $F(x_\infty) = x_\infty$ ). Este punto fijo además satisface*

$$d(F^n(x_0), x_\infty) \leq \frac{L^n}{1-L} d(F(x_0), x_0)$$

para todo  $x_0 \in X$ .

*Demostración.* Si  $x_0$  es un punto cualquiera de  $X$ , pongamos  $x_1 = F(x_0)$ , y para cada  $n \in \mathbb{N}$  definamos  $x_{n+1} = F(x_n)$ . Como  $f$  es  $L$ -Lipschitz para algún  $L < 1$ , tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(F(x_n), F(x_{n+1})) \leq L d(x_n, x_{n+1}).$$

Por iteración de esta desigualdad se deduce que también

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Luego, para  $k > n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_k) &\leq \sum_{j=n}^{k-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=n}^{k-1} L^j d(x_0, x_1) = \\ &= \frac{L^n - L^k}{1-L} d(x_0, x_1) \leq L^n \frac{d(x_0, x_1)}{1-L}, \end{aligned}$$

y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n = 0$  esto implica que  $(x_n)$  es de Cauchy en el espacio métrico  $(X, d)$ . Como  $X$  es completo,  $(x_n)$  converge a un  $x_\infty$  en  $X$ . Además tenemos que

$$d(F(x_n), F(x_\infty)) \leq Ld(x_n, x_\infty) \rightarrow 0,$$

luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x_\infty)$ . Por tanto,

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x_\infty),$$

y así resulta que  $x_\infty$  es un punto fijo de  $F$ . Por último,  $x_\infty$  es el único punto fijo de  $F$ : si hubiera otro punto fijo distinto, digamos  $\varphi$ , entonces tendríamos

$$d(x_\infty, \varphi) = d(F(x_\infty), F(\varphi)) \leq Ld(x_\infty, \varphi) < d(x_\infty, \varphi),$$

lo que es absurdo. □

## 2.2. Integración de funciones con valores en $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ . Diremos que una función  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  es integrable si lo son sus funciones coordenadas respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, si escribiendo  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  se tiene que cada  $\varphi_j$  es integrable en  $A$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Llamaremos integral de  $\varphi$  en  $A$  al vector

$$\int_A \varphi := \left( \int_A \varphi_1, \dots, \int_A \varphi_n \right).$$

**Teorema 2.3.** *Si  $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones integrables,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , se cumple que<sup>2</sup>*

1. *La función  $\alpha\varphi + \beta\psi$  es integrable, y  $\int_A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_A \varphi + \beta \int_A \psi$ .*
2.  *$\|\int_A \varphi\| \leq \int_A \|\varphi\|$ .*
3. *En el caso  $d = 1$  y  $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$  se tiene además, para cada función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$ , que  $g(t) = g(a) + \int_a^t g'(s)ds$ .*

*Demostración.* (1) es consecuencia directa de la definición y de la linealidad de la integral de funciones con valores en  $\mathbb{R}$ , y (3) se obtiene aplicando el teorema fundamental del cálculo coordenada a coordenada. Para demostrar (2), denotemos

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \left( \int_A \varphi_1, \dots, \int_A \varphi_n \right) = \int_A \varphi.$$

Podemos suponer  $x \neq 0$ . Tenemos entonces, usando la linealidad de la integral de funciones con valores en  $\mathbb{R}$  y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^n$ , que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \int_A \varphi_j(t) dt = \int_A \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t) dt \leq \int_A \|x\| \|\varphi(t)\| dt = \|x\| \int_A \|\varphi\|,$$

de donde deducimos (2) al dividir por  $\|x\|$ . □

Es también fácil comprobar, usando la propiedad (1), que la definición de  $\int_A \varphi$  no depende de la base fijada en  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>2</sup>Aquí  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ . El resultado de (2) es también cierto para cualquier otra norma en  $\mathbb{R}^n$ , pero una demostración basada en la misma idea requeriría usar el teorema de Hahn-Banach. Ver los ejercicios 2.18 y 2.19.

### 2.3. Existencia y unicidad del problema de valor inicial en $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ , donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  e  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Se comprueba inmediatamente, usando el teorema fundamental del cálculo, que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (2.7)$$

y en particular (2.6) tiene solución única si y sólo si (2.7) tiene solución única.

A continuación vemos cómo, aplicando el teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas, podemos asegurar la existencia y unicidad locales de este ecuación.

**Teorema 2.4** (Picard–Lindelöf). *Sea  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ , donde  $U$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in U$ , y  $t_0 \in I$ . Supongamos que  $f$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente<sup>3</sup> respecto de  $t$ . Entonces existe un entorno de  $t_0$  en el cual (2.6) tiene solución única.*

*Demostración.* Puede suponerse  $t_0 = 0$ . Vamos a aplicar el teorema de la aplicación contractiva al operador  $F : C \rightarrow C$  definido por

$$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds,$$

donde  $C = B_X(x_0, \delta)$  es una bola cerrada en  $X := (C([0, T], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ , con  $\delta > 0$  y  $T > 0$  elegidos de forma adecuada, y por abuso de notación  $x_0$  también representa la función constante  $x_0(t) \equiv x_0$ . Nótese que al ser  $C$  un cerrado de  $X$ , es también un espacio métrico completo con la distancia heredada de  $X$ , y el Teorema del punto fijo 2.2 nos proporcionará una función  $x \in C \subset C([0, T], \mathbb{R}^n)$  tal que  $F(x) = x$ , es decir, una función continua  $x$  tal que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Además  $x$  será la única función en  $C$  con esta propiedad. Como ya sabemos, esto implicará que  $x$  será la única función que satisfaga (2.6).

Veamos pues cómo podemos escoger  $\delta$  y  $T$  para que todo esto funcione como deseamos. Puesto que  $U$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f(t, x)$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de la variable  $t$ , existen números  $\delta > 0$  y  $L \geq 0$  tal que  $B(x_0, \delta) \subset U$  y

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|$$

para todos  $u, v \in B(x_0, \delta)$ ,  $t \in [0, \delta]$ . Denotemos

$$M := \sup_{(s, u) \in [0, \delta] \times B(x_0, \delta)} \|f(s, u)\|,$$

que es un número real positivo por ser la función  $f$  continua en el compacto  $[0, \delta] \times B(x_0, \delta)$ , y escojamos un número  $T$  tal que

$$0 < T < \min \left\{ \frac{\delta}{M+1}, \frac{1}{L} \right\}$$

<sup>3</sup>Es decir, que para cada  $(s_0, y_0) \in I \times U$  existen números  $L > 0$  y  $\delta > 0$  tales que  $\|f(s, x) - f(s, y)\| \leq L\|x - y\|$  para todos  $x, y \in B(y_0, \delta)$ ,  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ .

(en el caso genérico en que  $M > 0$ , puede ponerse  $0 < T < \min\{\frac{\delta}{M}, \frac{1}{L}\}$ ). Dado  $x \in B_X(x_0, \delta)$ , se tiene que  $\|x(t) - x_0\| \leq \delta$  para todo  $t \in [0, T]$ , y por tanto, teniendo en cuenta que  $T < \delta$ ,

$$\|F(x) - x_0\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|f(s, x(s))\| ds \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t M ds = TM < \delta.$$

Esto implica que  $F(x) \in C$  para todo  $x \in C$ , y se cumple la primera condición que necesitamos.

Por otra parte, si  $x, y \in C = B_X(x_0, \delta)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_\infty &= \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\| \leq \\ &\sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t L \|x(s) - y(s)\| ds \leq \\ &\sup_{t \in [0, T]} \int_0^t L \|x - y\|_\infty ds = TL \|x - y\|_\infty, \end{aligned}$$

y como  $TL < 1$  también tenemos que  $F : C \rightarrow C$  es contractiva.

Finalmente, nótese que si  $t_0 = 0$  está en el interior de  $I$ , la misma demostración con cambios obvios prueba que existe una única solución definida en el intervalo  $[-T, 0]$ . Por tanto existe una única solución definida en  $[-T, T]$ .  $\square$

**Observación 2.5.** La demostración del teorema anterior prueba de hecho lo siguiente: si  $L, M$  y  $\delta$  son números positivos tales que:

1.  $B(x_0, \delta) \subset U$ :
2.  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$  para todos  $(t, x), (t, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta)$ ;
3.  $\|f(t, x)\| \leq M$  para todo  $(t, x) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta)$ ,

entonces, para todo  $T > 0$  tal que

$$0 < T < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{\delta}{1 + M}\right\}$$

(o bien  $0 < T < \min\{\frac{\delta}{M}, \frac{1}{L}\}$  si  $M > 0$ ), existe una única solución de la ecuación  $x'(t) = f(t, x(t))$  con la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , definida en el intervalo  $[t_0 - T, t_0 + T]$ . Además esta solución satisface  $x(t) \in B(x_0, \delta)$  para todo  $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ .

## 2.4. Dependencia de la condición inicial. Desigualdades de Gronwall.

**Lema 2.6** (Desigualdad de Gronwall generalizada). *Supongamos que  $\psi(t)$  satisface*

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

con  $\beta(t) \geq 0$ . Entonces se tiene

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds, \quad t \in [0, T].$$

Si además  $\alpha$  es creciente entonces se tiene

$$\psi(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_0^t \beta(s)ds\right), \quad t \in [0, T].$$



*Demostración.* Definamos  $\phi(t) = \exp\left(-\int_0^t \beta(s)ds\right)$ , de modo que

$$\frac{d}{dt} \left( \phi(t) \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \right) = \beta(t)\phi(t) \left( \psi(t) - \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \right) \leq \alpha(t)\beta(t)\phi(t).$$

Integrando esta desigualdad respecto de  $t$  y dividiendo por  $\phi(t)$  obtenemos

$$\int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \leq \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \frac{\phi(s)}{\phi(t)} ds.$$

Sumando  $\alpha(t)$  en ambos lados y utilizando la hipótesis se deduce inmediatamente el resultado.

Si además suponemos que  $\alpha$  es creciente, tenemos, para cada  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \psi(t) &\leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds \leq \\ &\alpha(t) + \alpha(t) \int_0^t \beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds = \\ &\alpha(t) \exp\left(\int_0^t \beta(s)ds\right). \end{aligned}$$

□

**Corolario 2.7** (Desigualdad de Gronwall). *Si  $\psi$  satisface*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t (b\psi(s) + c)ds, \quad t \in [0, T],$$

donde  $b \geq 0$ , entonces

$$\psi(t) \leq ae^{bt} + \frac{c}{b}(e^{bt} - 1).$$

*Demostración.* Basta aplicar el lema anterior con  $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) + c/b$  en lugar de  $\psi$ ,  $\alpha(t) = a + cb^{-1}$ , y  $\beta(t) = b$ . Los detalles se dejan como ejercicio. □

**Teorema 2.8** (Dependencia continua respecto de  $f$  y del valor inicial). *Sean  $f, g \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ , y supongamos que  $f$  es localmente Lipschitziana en la segunda variable, uniformemente respecto de la primera. Si  $x(t)$  e  $y(t)$  son las respectivas soluciones de los p.v.i.*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

entonces se tiene que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} \left( e^{L|t-t_0|} - 1 \right),$$

donde

$$L := \sup_{(t,x) \neq (t,y) \in W} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|},$$

y

$$M := \sup_{(t,x) \in W} \|f(t,x) - g(t,x)\|,$$

siendo  $W$  algún conjunto que contiene las gráficas de las funciones  $x(t)$  e  $y(t)$ .

*Demostración.* Puede suponerse  $t_0 = 0$ . Se tiene

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leq \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\| ds \leq \\ &\|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| + \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| ds \leq \\ &\|x_0 - y_0\| + \int_0^t (L\|x(s) - y(s)\| + M) ds.\end{aligned}$$

Entonces, aplicando el corolario anterior con  $a = \|x_0 - y_0\|$ ,  $b = L$ ,  $c = M$ , y  $\psi(t) = \|x(t) - y(t)\|$ , obtenemos la desigualdad del enunciado.  $\square$

Una variante interesante de este resultado se obtiene al combinarlo con la demostración del Teorema 2.4, suponiendo que  $g$  también sea localmente Lipschitz respecto de la segunda variable, uniformemente respecto de la primera.

**Teorema 2.9.** Sean  $f, g \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ , y supongamos que  $f$  y  $g$  son localmente Lipschitzianas en la segunda variable, uniformemente respecto de la primera. Entonces existen dos números  $\delta, T > 0$  y dos funciones  $x(t)$  e  $y(t)$ , definidas en el intervalo  $[t_0 - T, t_0 + T]$ , que son las únicas soluciones de los p.v.i.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

en dicho intervalo, y se tiene que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1),$$

donde

$$L := \sup \left\{ \frac{\|f(t, x) - f(t, y)\|}{\|x - y\|} : (t, x), (t, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times (B(x_0, \delta) \cup B(y_0, \delta)), x \neq y \right\}$$

y

$$M := \sup \{ \|f(t, x) - g(t, x)\| : (t, x) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times (B(x_0, \delta) \cup B(y_0, \delta)) \}.$$

*Demostración.* Basta tener en cuenta la Observación 2.5 y usar el teorema anterior.  $\square$

## 2.5. Dependencia continua respecto de parámetros

En esta sección consideraremos un problema del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \lambda) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde  $\lambda \in \Lambda$  (un espacio métrico de parámetros), y veremos que bajo condiciones apropiadas las soluciones dependen continuamente no sólo de la condición inicial  $x_0$ , sino también del parámetro  $\lambda$ .

**Teorema 2.10.** Sean  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $(\Lambda, d)$  un espacio métrico. Supongamos que

$$I \times U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n \ni (t, x, \lambda) \mapsto f(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^n$$

es una función continua, y que  $f$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de las variables  $t, \lambda$ . Entonces, para cada  $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times U \times \Lambda$ , existen números  $\delta, T > 0$  tales que el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \lambda) \\ x(t_0) = y, \end{cases} \quad (2.8)$$

tiene solución única, definida en  $[t_0 - T, t_0 + T]$ , para cada  $(y, \lambda) \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta)$ . Además, si denotamos esta solución por  $t \mapsto \phi(t, y, \lambda)$ , la aplicación

$$[t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta) \ni (t, y, \lambda) \mapsto \phi(t, y, \lambda) \in \mathbb{R}^n$$

es continua.

*Demostración.* Fijado  $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times U \times \Lambda$ , por hipótesis existen  $L, \delta > 0$  tal que  $B(x_0, 2\delta) \subset U$ , y

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos los  $t \in [t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta]$ ,  $x, y \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta)$ ,  $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, 2\delta)$ . Además, por continuidad,  $f$  está acotada en algún entorno de  $(t_0, x_0, \lambda_0)$ , luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que un tal entorno es  $[t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta) \times B_\Lambda(\lambda_0, 2\delta)$ ; es decir, que existe  $M > 0$  tal que

$$\|f(t, x, \lambda)\| \leq M$$

para todo  $(t, x, \lambda) \in [t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta) \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta)$ . Entonces, puesto que  $B(y, \delta) \subset B(x_0, 2\delta)$  para cada  $y \in B(x_0, \delta)$ , por la Observación 2.5, sabemos que existe  $T > 0$  tal que el problema (2.8) tiene solución única para cada  $y \in B(x_0, \delta)$ , definida en el intervalo  $[t_0 - T, t_0 + T]$ ; de hecho sabemos que  $T$  puede tomarse como cualquier número positivo menor que  $\min\{L^{-1}, \delta(1+M)^{-1}\}$ . Denotando esta solución por  $\phi(t, y, \lambda)$ , también sabemos por la Observación 2.5 que  $\phi(t, y, \lambda) \in B(y, \delta) \subset B(x_0, 2\delta)$ , para todo  $(t, y, \lambda) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta)$ .

Fijemos ahora un parámetro  $\mu \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta)$ , y sea  $(s, z) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $f$  es continua en  $(s, z, \mu)$ , existe  $r(s, z) > 0$  tal que si  $(t, y, \lambda) \in (s - r(s, z), s + r(s, z)) \times \text{int}B_{\mathbb{R}^n}(z, r(s, z)) \times \text{int}B_\Lambda(\mu, r(s, z))$  entonces

$$\|f(t, y, \lambda) - f(s, z, \mu)\| \leq \varepsilon.$$

Puesto que  $[t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta)$  es compacto y

$$[t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta) \subset \bigcup_{(s,z) \in [t_0-T, t_0+T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta)} (s - r(s, z), s + r(s, z)) \times \text{int}B(z, r(s, z)),$$

podemos encontrar una cantidad finita de puntos  $s_1, \dots, s_N \in [t_0 - T, t_0 + T]$ ,  $z_1, \dots, z_N \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta)$  tales que, denotando  $r_j = r(s_j, z_j)$ , tenemos

$$[t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta) \subset \bigcup_{j=1}^N (s_j - r_j, s_j + r_j) \times \text{int}B(z_j, r_j).$$

Definamos  $r = \min\{r_1, \dots, r_N\}$ . Entonces, si  $d(\lambda, \mu) < r$ , para cualquier  $(s, z) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta)$  podemos encontrar un  $j \in \{1, \dots, N\}$  tal que  $(s, z) \in (s_j - r_j, s_j + r_j) \times B(z_j, r_j)$ , y entonces se cumple que

$$\|f(s, z, \lambda) - f(s, z, \mu)\| \leq \|f(s, z, \lambda) - f(s_j, z_j, \lambda)\| + \|f(s_j, z_j, \lambda) - f(s, z, \mu)\| \leq 2\varepsilon. \quad (2.9)$$

Puesto que sabemos que  $\phi(s, y, \mu) \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\delta)$  para todo  $(s, y, \mu) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta)$ , deducimos que

$$\|f(s, \phi(s, y, \mu), \lambda) - f(s, \phi(s, y, \mu), \mu)\| \leq 2\varepsilon. \quad (2.10)$$

para todo  $(s, y, \mu) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_{\Lambda}(\lambda_0, \delta)$ . Entonces, si  $\|x - y\| \leq \varepsilon$  y  $d(\lambda, \mu) < r$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\phi(t, x, \lambda) - \phi(t, y, \mu)\| &= \left\| x + \int_0^t f(s, \phi(s, x, \lambda), \lambda) ds - y - \int_0^t f(s, \phi(s, y, \mu), \mu) ds \right\| \leq \\ &\|x - y\| + \int_0^t \|f(s, \phi(s, x, \lambda), \lambda) - f(s, \phi(s, y, \mu), \mu)\| ds \leq \\ &\|x - y\| + \int_0^t \|f(s, \phi(s, x, \lambda), \lambda) - f(s, \phi(s, y, \mu), \lambda)\| ds + \int_0^t \|f(s, \phi(s, y, \mu), \lambda) - f(s, \phi(s, y, \mu), \mu)\| ds \leq \\ &\|x - y\| + \int_0^t L \|\phi(s, x, \lambda) - \phi(s, y, \mu)\| ds + \int_0^t 2\varepsilon ds \leq \\ &\|x - y\| + \int_0^t L \|\phi(s, x, \lambda) - \phi(s, y, \mu)\| ds + 2T\varepsilon. \end{aligned}$$

Aplicando entonces el Corolario 2.7 de la desigualdad de Gronwall con  $a = \|x - y\|$ ,  $b = L$ , y  $c = 2T\varepsilon$ , obtenemos que

$$\|\phi(t, x, \lambda) - \phi(t, y, \mu)\| \leq \|x - y\| e^{LT} + \frac{2T\varepsilon}{L} (e^{LT} - 1) \leq \varepsilon e^{LT} + \frac{2T\varepsilon}{L} (e^{LT} - 1).$$

Como  $L$  y  $T$  están fijos en este argumento y  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, esto demuestra que  $\phi$  es continua en las variables  $x$  y  $\lambda$ , uniformemente respecto de  $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ . De aquí se deduce fácilmente que  $\phi$  es continua en las tres variables. En efecto, tenemos

$$\|\phi(t, x, \lambda) - \phi(s, y, \mu)\| \leq \|\phi(t, x, \lambda) - \phi(s, x, \lambda)\| + \|\phi(s, x, \lambda) - \phi(s, y, \mu)\|$$

y el primer sumando de la derecha tiende a 0 cuando  $t$  tiende a  $s$ , porque  $t \mapsto \phi(t, x, \lambda)$  es continua por ser diferenciable (dado que es solución de la ecuación  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \lambda)$  con condición inicial  $\varphi(t_0) = x$ ), mientras que el segundo sumando a la derecha de la desigualdad tiende a 0 cuando  $x$  tiende a  $y$  y  $\lambda$  tiende a  $\mu$ , por lo visto antes.  $\square$

## 2.6. Existencia y Lipschitzianidad local del flujo

**Definición 2.3.** Supongamos que  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y que  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de  $t$ . Para cada  $x_0 \in U$ , denotaremos por  $\phi(t, x_0)$  la única solución local del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que está definida en algún intervalo abierto alrededor de  $t_0$ . A la aplicación

$$(t, x_0) \mapsto \phi(t, x_0)$$

se le llama *flujo* asociado a la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$ .

Aplicando el Teorema 2.8 (y observando que  $M = 0$  en el caso en que  $f = g$ ), se obtiene inmediatamente lo siguiente.

**Teorema 2.11** (Dependencia continua de la condición inicial). *Si  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de  $t$ , entonces*

$$\|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|}.$$

*En particular las soluciones de  $x'(t) = f(t, x(t))$  dependen continuamente del dato inicial  $x(0) = x_0$ .*

De hecho vamos a probar que el flujo  $\phi(t, x)$  es localmente Lipschitz en las dos variables.

**Teorema 2.12.** *Supongamos que  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de  $t$ . Entonces, alrededor de cada  $(t_0, x_0) \in I \times U$  puede encontrarse un compacto de la forma  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B(x_0, \delta) \subset [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B(x_0, 2\delta) \subset I \times U$ , con  $\varepsilon, \delta > 0$ , tal que el flujo  $\phi(t, x)$  está bien definido y es Lipschitz en este conjunto. De hecho se tiene que*

$$\|\phi(t, x) - \phi(s, y)\| \leq \|x - y\|e^{L|t-t_0|} + |s - t|M \text{ para todo } (t, x), (s, y) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B(x_0, \delta)$$

donde

$$L = \sup_{(t,x) \neq (t,y) \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times B(x_0, 2\delta)} \frac{\|f(t, x) - f(t, y)\|}{\|x - y\|}, \quad y \quad M = \max_{(t,x) \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times B(x_0, 2\delta)} \|f(t, x)\|.$$

*Demostración.* Si en la demostración del Teorema de Picard-Lindelöf 2.4 se cambia  $\delta$  por  $2\delta$  se ve que en el intervalo  $[t_0 - T, t_0 + T]$  existen, y son únicas, las soluciones de  $x'(t) = f(t, x(t))$  con condición inicial dentro de la bola  $B(x_0, \delta)$ . Además, de la demostración del Teorema 2.4 también se desprende que

$$\phi(t, x) \in B(x, \delta) \subset B(x_0, 2\delta) \text{ para todos } x \in B(x_0, \delta), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \quad (2.11)$$

Así, el flujo  $\phi$  está bien definido en  $[t_0 - T, t_0 + T] \times B(x_0, \delta)$ , de lo cual se deduce la primera parte del enunciado.

Por otro lado, observemos que

$$\phi(t, y) = y + \int_{t_0}^t f(r, \phi(r, y)) dr,$$

luego

$$\|\phi(t, y) - \phi(s, y)\| = \left\| \int_s^t f(r, \phi(r, y)) dr \right\|,$$

y además por el teorema anterior sabemos que

$$\|\phi(t, x) - \phi(t, y)\| \leq \|x - y\|e^{L|t-t_0|}.$$

Por tanto, combinando estas desigualdades y usando también (2.11), obtenemos que, para todos  $(t, x), (s, y) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B(x_0, \delta)$ ,

$$\begin{aligned} \|\phi(t, x) - \phi(s, y)\| &\leq \|\phi(t, x) - \phi(t, y)\| + \|\phi(t, y) - \phi(s, y)\| \leq \\ &\|x - y\|e^{L|t-t_0|} + \left\| \int_s^t f(r, \phi(r, y)) dr \right\| \leq \|x - y\|e^{L|t-t_0|} + \int_s^t \|f(r, \phi(r, y))\| dr \leq \\ &\|x - y\|e^{L|t-t_0|} + \int_s^t M dr = \|x - y\|e^{L|t-t_0|} + M|t - s|, \end{aligned}$$

donde

$$L = \sup_{(t,x) \neq (t,y) \in [t_0-T, t_0+T] \times B(x_0, 2\delta)} \frac{\|f(t, x) - f(t, y)\|}{\|x - y\|}, \quad y \quad M = \max_{(t,x) \in [t_0-T, t_0+T] \times B(x_0, 2\delta)} \|f(t, x)\|.$$

Evidentemente esto implica la Lipschitzianidad de  $\phi$  en  $[t_0 - T, t_0 + T] \times B(x_0, \delta)$ .  $\square$

## 2.7. El teorema de diferenciabilidad del flujo

En muchas situaciones es importante saber que el flujo  $(t, y) \mapsto \phi(t, y)$  es diferenciable si  $f$  lo es: es decir, hay una dependencia no sólo continua, sino incluso diferenciable de los datos iniciales del problema  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = y$ .

**Teorema 2.13** (de diferenciabilidad del flujo local). *Supongamos que  $f \in C^k(I \times U, \mathbb{R}^n)$ , con  $k \geq 1$ . Entonces, alrededor de cada  $(t_0, x_0) \in I \times U$  puede encontrarse un entorno de  $(t_0, x_0)$  de la forma  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times \text{int}B(x_0, \delta)$  tal que el flujo  $\phi(t, x)$  está bien definido y es de clase  $C^k$  en este conjunto.*

Una consecuencia de apariencia más general es la siguiente.

**Corolario 2.14** (Dependencia diferenciable de parámetros). *Supongamos que  $f$  depende de un parámetro  $\lambda \in \Lambda$ , donde  $\Lambda$  es un abierto de  $\mathbb{R}^p$ , y consideremos el p.v.i.*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \lambda) \\ y(t_0) = x, \end{cases}$$

cuya solución denotaremos por  $\phi(t, x, \lambda)$ . Supongamos que  $f \in C^k(I \times U \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ . Entonces alrededor de cada  $(t_0, x_0, \lambda_0)$  existe un entorno tal que la aplicación  $(t, x, \lambda) \mapsto \phi(t, x, \lambda)$  está bien definida y es de clase  $C^k$  en ese entorno.

*Demostración del Teorema 2.13 y del Corolario 2.14.* Por lo visto en la sección anterior ya sabemos que el flujo existe localmente en abiertos de esta forma. Sólo tenemos que demostrar que es de clase  $C^k$ .

Añadiendo  $t$  a las variables dependientes y la ecuación  $t' = 1$  a nuestro sistema, se obtiene una ecuación equivalente en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que es autónoma. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que nuestra ecuación es autónoma (es decir  $x'(t) = f(x(t))$ ), y que  $t_0 = 0$ .

Supongamos por un momento que el teorema es cierto para  $k \geq 2$ ; entonces, como se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = f(\phi(t, x)),$$

derivando respecto de  $x$  obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \phi(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} f(\phi(t, x)),$$

e intercambiando el orden de derivación,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \phi(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \phi(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} f(\phi(t, x)) = Df(\phi(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x).$$

En particular, teniendo también en cuenta que  $\phi(0, x) = x$  y por tanto  $\partial \phi(0, x) / \partial x = \mathbb{I}$ , vemos que la derivada

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x)$$

necesariamente deberá satisfacer la *primera ecuación variacional*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t, x)y(t), \text{ donde } A(t, x) = Df(\phi(t, x)), \\ y(0) = \mathbb{I}, \end{cases} \quad (2.12)$$

que es una ecuación lineal (con coeficientes variables) equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = \mathbb{I} + \int_0^t A(s, x)y(s)ds, \quad (2.13)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la identidad en el espacio de matrices  $n \times n$  (naturalmente isomorfo a  $\mathbb{R}^{n^2}$ ). Aquí  $x$  puede considerarse un parámetro, es decir, tenemos una ecuación variacional diferente para cada  $x$ .

Usando el teorema de Picard-Lindelöf es inmediato comprobar que la ecuación (2.12) tiene solución local única  $y(t)$ . De hecho, como indicamos en la Observación 2.5, la prueba del Teorema 2.4 muestra que la solución de esta ecuación variacional estará definida en un intervalo de la forma  $[-T, T]$  siempre que  $T$  se escoja suficientemente pequeño para que

$$0 < T < \min \left\{ \frac{1}{L}, \frac{\delta}{1+M} \right\},$$

siendo  $L$  una constante de Lipschitz (respecto de la variable  $y$ , uniformemente respecto de la variable  $t$ ) común a todas las funciones  $A(t, x)$ ,  $(t, x) \in [-\delta, \delta] \times B(x_0, \delta)$ , y siendo  $M$  una cota de  $\|A(t, x)y\|$  en el conjunto  $\{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} : |t| \leq \delta, \|x - x_0\| \leq \delta, \|y - \mathbb{I}\| \leq 1\}$ . En nuestro caso esta cota  $M$  y esta constante de Lipschitz común  $L$  existen y pueden considerarse iguales, ya que, al ser la función  $(t, x, y) \mapsto A(t, x)y$  continua en  $[-\delta, \delta] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_{\mathbb{R}^{n^2}}(\mathbb{I}, 1)$ , está acotada en este compacto, digamos por una constante  $M > 0$ , y entonces se tiene que

$$\|A(t, x)y - A(t, x)z\| \leq \|A(t, x)\| \|y - z\| \leq M \|y - z\|$$

para todo  $(t, x) \in [-\delta, \delta] \times B(x_0, \delta)$ , y todos  $y, z \in \mathbb{R}^{n^2}$ .

Por tanto puede aplicarse la demostración del Teorema 2.4 para garantizar la existencia y unicidad, en el intervalo  $[-T, T]$ , de las soluciones de (2.12), para todo  $x \in B(x_0, \delta)$ .

La estrategia de la demostración del teorema consistirá en probar que  $\phi(t, x)$  es diferenciable respecto de  $x$ , y que la derivada de  $\phi$  respecto de  $x$  en  $(t, x)$  es precisamente la solución  $y(t)$  de (2.12), para todo  $(t, x) \in [-T, T] \times B(x_0, \delta)$ .

Consideremos primero el caso  $k = 1$ . Por definición de flujo,  $\phi(t, x)$  es diferenciable respecto de la variable  $t$ . Queremos probar que  $\phi(t, x)$  es diferenciable, respecto de la variable  $x$ , en un punto  $x_1 \in B$ . Por facilitar la notación, supondremos sin pérdida de generalidad que  $x_1 = 0$ , y definiremos

$$\theta(t, x) = \frac{\phi(t, x) - \phi(t, 0) - \psi(t)x}{\|x\|}, \quad (2.14)$$

en donde  $\psi(t)$  denotará la única solución a la ecuación (2.12), en el caso  $x = 0$ , y con condición inicial  $y(0) = \mathbb{I}$ ; es decir,  $\psi$  es la única función que cumple

$$\psi'(t) = A(t, 0)\psi(t), \quad \psi(0) = \mathbb{I}, \quad \text{donde } A(t, 0) = Df(\phi(t, x))|_{x=0}. \quad (2.15)$$

El objetivo entonces es probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(t, x) = 0$ .

Como  $f$  es de clase  $C^1$ , usando el Teorema Fundamental del Cálculo 2.3(3) con la función  $t \mapsto f(x + t(y - x))$  en el intervalo  $[0, 1]$ , tenemos que

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x) dt,$$

que podemos reescribir como

$$f(y) - f(x) = Df(x)(y - x) + \left( \int_0^1 (Df(x + t(y - x)) - Df(x)) dt \right) (y - x),$$

de modo que

$$f(y) - f(x) = Df(x)(y - x) + R(y, x)(y - x), \quad (2.16)$$

con

$$\lim_{y \rightarrow x} \|R(y, x)\| = 0 \quad \text{uniformemente para } x \text{ en un entorno de } 0, \quad (2.17)$$

ya que  $Df$  es uniformemente continua en un entorno de 0.

Usando estas ecuaciones con  $\phi(t, x)$  en lugar de  $y$ , y con  $\phi(t, 0)$  en lugar de  $x$ , obtenemos que

$$f(\phi(t, x)) - f(\phi(t, 0)) = Df(\phi(t, 0))(\phi(t, x) - \phi(t, 0)) + R(\phi(t, x), \phi(t, 0))(\phi(t, x) - \phi(t, 0)), \quad (2.18)$$

con

$$\lim_{y \rightarrow z} \|R(y, z)\| = 0 \quad \text{uniformemente para } z \text{ en un entorno de } 0. \quad (2.19)$$

Entonces, usando (2.14), (2.15) y (2.18), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta(t, x) &= \frac{1}{\|x\|} (f(\phi(t, x)) - f(\phi(t, 0)) - A(t, 0)\psi(t)x) = \\ &= \frac{1}{\|x\|} (Df(\phi(t, 0))(\phi(t, x) - \phi(t, 0)) + R(\phi(t, x), \phi(t, 0))(\phi(t, x) - \phi(t, 0)) - A(t, 0)\psi(t)x) = \\ &= \frac{1}{\|x\|} (A(t, 0)(\phi(t, x) - \phi(t, 0)) + R(\phi(t, x), \phi(t, 0))(\phi(t, x) - \phi(t, 0)) - A(t, 0)\psi(t)x) = \\ &= A(t, 0)\theta(t, x) + R(\phi(t, x), \phi(t, 0)) \frac{\phi(t, x) - \phi(t, 0)}{\|x\|}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(t, x) = A(t, 0)\theta(t, x) + \frac{\phi(t, x) - \phi(t, 0)}{\|x\|} R(\phi(t, x), \phi(t, 0)).$$

Integrando esta igualdad en  $[0, t]$ , con  $t \leq T$ , tomando normas, y recordando (ver el Teorema 2.11) que existe  $L > 0$  tal que, para todo  $x$  en un entorno de 0, se tiene

$$\|\phi(t, x) - \phi(t, 0)\| \leq \|x\|e^{Lt} \leq \|x\|e^{LT}, \quad (2.20)$$

deducimos que

$$\|\theta(t, x)\| \leq \tilde{R}(x) + \int_0^t \|A(s, 0)\| \|\theta(s, x)\| ds \quad \text{para todo } t \in [0, T], \quad (2.21)$$

donde

$$\tilde{R}(x) = e^{LT} \int_0^T \|R(\phi(s, x), \phi(s, 0))\| ds. \quad (2.22)$$

Ahora, aplicando la Desigualdad de Gronwall (Lema 2.6, con  $\alpha(t) = \tilde{R}(x)$ , constante respecto de  $t$ ,  $\beta(s) = \|A(s, 0)\|$ , y  $\psi(t) = \|\theta(t, x)\|$ ), obtenemos que

$$\|\theta(t, x)\| \leq \tilde{R}(x) \exp\left(\int_0^t \|A(s, 0)\| ds\right),$$

y usando (2.19) y (2.22) junto con el hecho de que  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(t, x) = \phi(t, 0)$  uniformemente en  $t \in [-T, T]$  (que es consecuencia de (2.20)), concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(t, x) = 0$$

(podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $T$  es suficientemente pequeño para que  $\phi(s, x)$  esté en el entorno de  $x_1 = 0$  en donde (2.19) vale).

Esto muestra que

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x)|_{x=0} \text{ existe y es igual a } \psi(t),$$

para cada  $t \in [0, T]$ . Análogamente se ve que esto es cierto para cada  $t \in [-T, 0]$ . Luego  $\partial\phi(t, x)/\partial x$  existe para  $x = 0$ , y es igual a  $\psi(t)$  para cada  $t \in [-T, T]$ . Como  $x_1$  (que hemos supuesto igual a 0 por simplificar la notación) es arbitrario, esto implica que

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x) \text{ existe para todo } (t, x) \in J \times B,$$

y que esta derivada parcial es igual a la solución de (2.12).



Finalmente, veamos que las derivadas parciales

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x), \text{ y } \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x)$$

son ambas continuas, y por tanto  $\phi(t, x)$  es de clase  $C^1$  en  $J \times B$ . La segunda de ellas es igual a  $f(\phi(t, x))$ , que es obviamente continua. Respecto de la primera, recordemos que es la solución de la primera ecuación variacional (2.12). Ahora bien, por el Teorema 2.10), las soluciones de esta ecuación dependen continuamente no sólo de  $t$  y del dato inicial, sino también del parámetro  $x$ . Por tanto  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)$  es continua en las variables  $(t, x)$ . Esto completa la demostración del Teorema 2.13 en el caso  $k = 1$

Para demostrar el Corolario 2.14 en el caso  $k = 1$  basta considerar el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \lambda(t)) \\ \lambda'(t) = 0. \end{cases}$$

y aplicar el Teorema 2.13 a esta nueva ecuación. De hecho este sencillo truco demuestra que los enunciados del Teorema 2.13 y del Corolario 2.14 son totalmente equivalentes, cosa que vamos a usar en el argumento que sigue.

Ahora demostraremos conjuntamente el Teorema 2.13 y el Corolario 2.14 para el caso  $k \geq 2$ , usando un argumento de inducción. Ya sabemos que ambos resultados son ciertos para  $k = 1$ . Supongamos que los enunciados de estos dos resultados son ciertos para  $k$ , y veamos que entonces también lo son para  $k + 1$ . Suponiendo que  $f$  es de clase  $C^{k+1}$ , como en particular es  $C^1$  ya sabemos por la demostración del caso  $k = 1$  que la derivada respecto de  $x$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)$$

es solución de la primera ecuación variacional (2.12). Pero como

$$A(t, x) = Df(\phi(t, x))$$

y por hipótesis  $Df$  es de clase  $C^k$  y  $\phi$  es de clase  $C^k$ , se tiene que  $A$  es de clase  $C^k$ ; es decir, la ecuación 2.12 (que depende del parámetro  $x$ ) está definida por una función de clase  $C^k$ . Entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre la validez del Corolario 2.14 para  $C^k$ , obteniendo que  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)$  es de clase  $C^k$ . Por otra parte, la otra derivada parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x))$$

es también de clase  $C^k$ , por ser composición de funciones de clase  $C^k$ . Como todas las derivadas parciales de  $\phi(t, x)$  son de clase  $C^k$ , concluimos que  $\phi(t, x)$  es de clase  $C^{k+1}$ . Es decir, el enunciado del Teorema 2.13 es cierto para  $C^{k+1}$ . Como ya hemos indicado, esto equivale a decir que el Corolario 2.14 es también cierto para  $C^{k+1}$ . Esto concluye el argumento de inducción y por tanto la prueba de ambos resultados para cualquier  $k \geq 2$ .  $\square$

## 2.8. Problemas

**Problema 2.1.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios métricos y  $(f_n)$  es una sucesión de funciones continuas de  $X$  en  $Y$  que converge uniformemente a una función  $f : X \rightarrow Y$ , probar que  $f$  es continua.

**Problema 2.2.** Supongamos que  $f \in C^k(I \times U, \mathbb{R}^n)$ . Probar que la solución local de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

dada por el teorema de Picard-Lindelöf es de clase  $C^{k+1}$ .

**Problema 2.3.** Usar el teorema del valor medio para demostrar el siguiente resultado: si  $\Omega$  es un abierto convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable, entonces  $f$  es Lipschitz si y sólo si  $Df$  está acotada en  $\Omega$ .

**Problema 2.4.** Dar ejemplos que prueben que el resultado del problema anterior es en general falso si  $\Omega$  es un abierto conexo que no es convexo.

**Problema 2.5.** Sea  $U$  un abierto convexo de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Supongamos que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(t, x)$$

existen y son continuas y acotadas en  $I \times U$ . Demostrar que existe  $L \geq 0$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos  $x, y \in U, t \in I$ .

**Problema 2.6.** Averiguar si las siguientes funciones son Lipschitz en algún entorno de 0, y en caso afirmativo estimar su constante de Lipschitz en ese entorno.

1.  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
2.  $f(x) = |x|^{1/2}$
3.  $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$  si  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ .

**Problema 2.7.** Averiguar si los siguientes campos vectoriales son Lipschitz en el conjunto indicado, y en caso afirmativo estimar su constante de Lipschitz en ese conjunto.

1.  $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$
2.  $f(x) = x^{1/3}, x \in [-1, 1]$
3.  $f(x, y) = (x + y, 1/(x + y)), x, y \in [1, \infty)$
4.  $f(x, y) = (x - y^2, xy/(1 + x^2 + y^2)), x^2 + 2y^2 \leq 4$
5.  $f(x, y) = (\sqrt{1 + x + y}, \sqrt{1 + x^2 + y^2}), x, y \in (\varepsilon, \infty), \text{ con } \varepsilon > 0$ .

**Problema 2.8.** Dar un ejemplo de función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sea localmente Lipschitz en un entorno de cada punto excepto 0, que esté acotada, y tal que el problema de valor inicial  $x' = f(x), x(0) = 0$  no tenga ninguna solución.

**Problema 2.9.** Dar un ejemplo de función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sea de clase  $C^\infty$  y uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ , pero que no sea Lipschitz en  $\mathbb{R}$ .

**Problema 2.10.** Aplicar el procedimiento iterativo de la demostración del teorema de Picard-Lindelöf para encontrar la solución de  $x' = x, x(0) = 1$ .

**Problema 2.11.** Aplicar el procedimiento iterativo de la demostración del teorema de Picard-Lindelöf para encontrar la solución de

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases}$$

**Problema 2.12.** Aplicar el procedimiento iterativo de la demostración del teorema de Picard-Lindelöf a la ecuación  $x'(t) = 2t - 2\sqrt{\max\{x, 0\}}, x(0) = 0$ . ¿Qué ocurre?

**Problema 2.13.** Estudiar la unicidad de las soluciones de

$$x'(t) = \begin{cases} -t|x|^{1/2} & \text{si } x \geq 0, \\ t|x|^{1/2} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

**Problema 2.14.** Probar que si  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $I \times U \ni (t, x) \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ , es continua y las derivadas parciales  $\partial f / \partial x_i$  existen y son continuas en  $I \times U$  entonces el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución local única para todo  $x_0 \in U$ . En particular, si  $f \in C^1(I \times U)$  entonces este problema tiene solución local única para todo  $x_0 \in U$ .

**Problema 2.15.** Supongamos que  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$  cumple que  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|$  para alguna función continua  $L : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Demostrar que la ecuación  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = x$  tiene solución única, y que si denotamos por  $\phi(t, x)$  la solución de esta ecuación entonces se tiene que

$$\|\phi(t, x) - \phi(t, z)\| \leq \|x - z\| e^{\int_0^t L(s) ds}$$

¿bajo qué condiciones sobre  $x, z, t$ ?

**Problema 2.16.** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tales que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x$ . Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ y' = f(x)y \end{cases}$$

tiene a lo sumo una solución en cada intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  para cada condición inicial  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

**Problema 2.17.** Analizar los valores  $(t_0, x_0)$  para los cuales puede garantizarse la existencia y unicidad de solución local para la ecuación  $x' = |x|^{1/2}(1+t)$ . Después resolver explícitamente la ecuación, y comprobar que por el punto  $(0, 0)$  pasan infinitas soluciones.

**Problema 2.18** (Teorema de Hahn-Banach en  $\mathbb{R}^n$ ). Sean  $E$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  (donde se considera una norma cualquiera), y sea  $T : E \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación lineal. Entonces existe una aplicación lineal  $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $\tilde{T}(x) = T(x)$  para todo  $x \in E$ ;
2.  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

**Indicación:** Podemos suponer  $\|T\| = 1$  y  $E \neq \mathbb{R}^n$ . Sea  $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ , y definamos  $E_1 = \{x + tx_1 : x \in E, t \in \mathbb{R}\}$ . Se tiene

$$T(x) - \|x - x_1\| \leq \|y + x_1\| - T(y) \text{ para todos } x, y \in E.$$

Sea  $\alpha = \sup\{T(x) - \|x - x_1\| : x \in E\}$ . Entonces

$$T(x) - \alpha \leq \|x - x_1\| \text{ para todo } x \in E,$$

$$T(y) + \alpha \leq \|y + x_1\| \text{ para todo } y \in E.$$

Defínase  $T_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $T_1(x + tx_1) = T(x) + t\alpha$ . Comprobar que  $T_1$  es lineal, que  $T_1 = T$  en  $E$ , y que  $T_1(z) \leq \|z\|$  para todo  $z \in E_1$ . Aplicar inducción para concluir.

**Problema 2.19.** Sea  $\|\cdot\|$  una norma cualquiera en  $\mathbb{R}^n$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\|x\| = \sup\{T(x) : T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|T\| \leq 1\}.$$

**Problema 2.20.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, y  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineal. Probar que

$$T \left( \int_a^b f \right) = \int_a^b T \circ f.$$

Más en general, si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal, probar que

$$A \left( \int_a^b f \right) = \int_a^b A \circ f.$$

Concluir que la definición de  $\int_a^b f$  como el vector formado por las integrales de las funciones coordenadas de  $f$  no depende del sistema de coordenadas elegido en  $\mathbb{R}^n$ , y que  $\int_a^b f$  queda determinado por el conjunto  $\{\int_a^b T \circ f : T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}$ .

**Problema 2.21.** Usar los dos problemas anteriores para demostrar que el Teorema 2.3(2) vale para cualquier norma en  $\mathbb{R}^n$ .

## Capítulo 3

# Existencia y prolongabilidad de soluciones.

En este capítulo veremos cómo la continuidad de  $f$  basta para asegurar la existencia de al menos una solución (quizás no la única) del problema de valor inicial  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Este resultado se debe a Peano. Una herramienta esencial para esto será el teorema de Arzela-Ascoli, que exponemos en la siguiente sección. También estudiaremos la cuestión de la prolongabilidad de soluciones: tanto el teorema de Picard-Lindelöf como el de Peano nos dan un intervalo, en general pequeño, donde existe una solución, pero ésta puede existir en un intervalo mucho mayor, incluso en algunos casos todo  $\mathbb{R}$ ; entonces, ¿cómo saber cuándo y hasta dónde puede prolongarse una solución?

### 3.1. Compacidad en espacios de funciones. Teorema de Arzela-Ascoli.

Antes de presentar el teorema de Arzela-Ascoli haremos un breve estudio del espacio de las funciones continuas sobre un espacio métrico y de las nociones de convergencia puntual y uniforme de sucesiones de funciones.

**Definición 3.1.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Denotaremos por  $C(X, Y)$  el conjunto de todas las funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$ , y por  $C_b(X, Y)$  el subconjunto de todas las funciones continuas y acotadas de  $X$  en  $Y$ . En este subconjunto definiremos la distancia entre dos funciones  $f, g \in C_b(X, Y)$  como

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Es inmediato ver que  $d$  define una distancia en  $C_b(X, Y)$ .

Cuando  $Y$  es un espacio vectorial normado,  $C_b(X, Y)$  y  $C(X, Y)$  resultan ser también espacios vectoriales. Al espacio  $C_b(X, Y)$  podemos dotarlo de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_Y : x \in X\},$$

que genera precisamente la distancia  $d_\infty$  anteriormente definida en  $C_b(X, Y)$ .

Cuando  $Y = \mathbb{R}$ , el espacio  $Y$  suele omitirse en esta notación. Así  $C_b(X, \mathbb{R})$  suele escribirse simplemente  $C_b(X)$ . Cuando  $X = K$  es compacto, todas las funciones continuas de  $K$  en  $Y$  son acotadas, y se tiene que  $C(K, Y) = C_b(K, Y)$ .

**Definición 3.2.** Si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones de  $X$  en  $Y$  (no necesariamente continuas), diremos que  $(f_n)$  converge puntualmente a  $f$  si la sucesión  $(f_n(x))$  de  $Y$  converge a  $f(x)$  en el espacio métrico  $Y$  para cada  $x \in X$ . Si  $A \subseteq X$ , diremos que  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f$  sobre  $A$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$  para todo  $x \in A$ .

Cuando  $Y = F$  es un espacio vectorial normado, diremos que una serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$  converge uniformemente en  $X$  (resp. puntualmente) si la sucesión  $(f_n)$  de las sumas parciales  $f_n = \sum_{j=1}^n g_j$  de la serie converge uniformemente (resp. puntualmente) en  $X$ .

Como en el caso ya conocido en que  $X$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , tenemos que el límite uniforme de funciones continuas es continuo.

**Proposición 3.1.** Si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones continuas de  $X$  en  $Y$  que converge uniformemente a  $f : X \rightarrow Y$  sobre  $X$ , entonces  $f$  es continua.

*Demostración.* Es igual que en el caso  $X = \mathbb{R} = Y$ , salvo detalles obvios, y se deja como ejercicio.  $\square$

Sin embargo el límite puntual de funciones continuas puede no ser continuo. Por ejemplo, la sucesión de funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f_n(t) = t^n$ , converge puntualmente a una función discontinua en 1.

El siguiente resultado relaciona la convergencia uniforme de sucesiones de funciones con la convergencia de la sucesión en el espacio métrico  $C_b(X, Y)$ .

**Proposición 3.2.** Una sucesión  $(f_n)$  de  $C_b(X, Y)$  converge uniformemente a  $f \in C_b(X, Y)$  si y sólo si  $f_n \rightarrow f$  en el espacio métrico  $(C_b(X, Y), d_\infty)$ .

*Demostración.* Consiste en escribir las definiciones y observar que son equivalentes; se deja como ejercicio.  $\square$

**Definición 3.3.** Se dice que una sucesión  $(f_n)$  de funciones de  $X$  en  $Y$  es uniformemente de Cauchy si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq n_0$  entonces  $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$  para todo  $x \in X$ .

Cuando  $Y$  es completo, es fácil ver que toda tal sucesión es convergente uniformemente en  $X$ . También es inmediato que si  $(f_n) \subset C_b(X, Y)$ , entonces  $(f_n)$  es uniformemente de Cauchy si y sólo si  $(f_n)$  es de Cauchy en  $C_b(X, Y)$ .

Es decir, tenemos lo siguiente.

**Proposición 3.3.** Si  $Y$  es un espacio métrico completo, entonces el espacio métrico  $(C_b(X, Y), d_\infty)$  también es completo.

En particular, si  $Y$  es un espacio de Banach, también lo es  $(C_b(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ .

*Demostración.* La demostración es idéntica a la de la Proposición 2.1, salvo cambios evidentes. Se deja al cuidado del lector,  $\square$

Por supuesto las definiciones y resultados anteriores son también válidos para series de funciones cuando  $Y$  es un espacio de Banach, pues basta aplicarlos a la sucesión de las sumas parciales. Se invita al lector a que enuncie y demuestre la versión para series.

Pasamos ahora a estudiar el teorema de Arzelà-Ascoli, que nos proporciona una caracterización de los subconjuntos compactos de  $C(K, Y)$ , donde  $K$  es un espacio métrico compacto. En este sentido es análogo al teorema de Heine-Borel que caracteriza la compacidad de los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . En la mayoría de los espacios del tipo  $C_b(X, Y)$  el teorema de Heine-Borel es falso, como sucede más en general en todo espacio vectorial normado de dimensión infinita. En efecto, el siguiente teorema implica que los únicos espacios vectoriales normados en los que los cerrados y acotados son compactos son los de dimensión finita.

**Teorema 3.4 (Riesz).** Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $B_E$  su bola unidad cerrada, y supongamos que  $B_E$  es compacto. Entonces  $E$  es de dimensión finita.

*Demostración.* Utilizaremos el siguiente lema.

**Lema 3.5.** Sean  $E$  un espacio vectorial normado y  $W \subset E$  un subespacio vectorial cerrado propio. Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in E$  tal que  $\|u\| = 1$  y  $d(u, W) \geq 1 - \varepsilon$ .

*Demostración.* Elijamos  $v \in E \setminus W$ . Como  $W$  es cerrado tenemos que  $d(v, W) > 0$ , y podemos escoger  $w \in W$  tal que

$$d(v, W) \leq \|v - w\| \leq \frac{d(v, W)}{1 - \varepsilon}.$$

Entonces

$$u := \frac{v - w}{\|v - w\|}$$

nos resuelve el problema. En efecto, para todo  $x \in W$  tenemos que

$$\|u - x\| = \left\| \frac{v - w}{\|v - w\|} - x \right\| = \frac{\|v - (w + \|v - w\|x)\|}{\|v - w\|} \geq \frac{d(v, W)}{\|v - w\|} \geq 1 - \varepsilon,$$

puesto que  $w + \|v - w\|x \in W$ , y así deducimos que  $d(u, W) \geq 1 - \varepsilon$ .  $\square$

Para demostrar el teorema de Riesz, supongamos que  $E$  tiene dimensión infinita. Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un subespacio vectorial de  $E$  de dimensión finita,  $n$ , y de modo que  $E_n \subset E_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Usando el lema anterior podemos construir entonces una sucesión de vectores  $(u_n)$  tales que  $u_n \in E_n \setminus E_{n-1}$ ,  $\|u_n\| = 1$ ,  $d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$  para todo  $n$ . En particular se tendrá  $\|u_n - u_m\| \geq 1/2$  si  $n \neq m$ , y es evidente entonces que  $(u_n)$  no puede tener ninguna subsucesión convergente y en conclusión que  $B_E$  no es compacta.  $\square$

Para enunciar el teorema de Arzelà-Ascoli, que como ya hemos avanzado caracteriza los subconjuntos compactos de  $C(K, Y)$ , necesitamos la noción de *equicontinuidad*.

**Definición 3.4.** Diremos que una familia  $\mathcal{F}$  de funciones de  $C_b(X, Y)$  es equicontinua si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in X$  y para toda  $f \in \mathcal{F}$  se tiene que  $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$  siempre que  $d(x, y) \leq \delta$ .

Es decir, en la definición usual de continuidad uniforme se pide además que el mismo  $\delta$  sirva a la vez para todas las funciones de  $\mathcal{F}$ .

Diremos también que  $\mathcal{F}$  es *puntualmente compacto* si  $\mathcal{F}_x := \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$  es compacto en  $Y$  para cada  $x \in X$ . Análogamente, diremos que  $\mathcal{F}$  es *puntualmente relativamente compacto* si la adherencia de  $\mathcal{F}_x := \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$  es compacta en  $Y$  para cada  $x \in X$ .

**Teorema 3.6.** Sea  $K$  un espacio métrico compacto,  $Y$  un espacio métrico cualquiera y  $\mathcal{F}$  un subconjunto de  $C(K, Y)$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es compacto en  $C(K, Y)$  si y sólo si  $\mathcal{F}$  es cerrado, equicontinuo y puntualmente relativamente compacto.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ): Consideremos la función  $\pi : \mathcal{F} \times K \rightarrow Y$  definida por  $\pi(f, x) = f(x)$ . Es fácil ver que  $\pi$  es continua (queda como ejercicio para el lector), y como  $\mathcal{F} \times K$  es compacto (por ser producto de dos espacios métricos compactos), entonces  $\pi$  es uniformemente continua. Esto significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para todos  $x, y \in K$ ,  $f, g \in \mathcal{F}$ , si  $d(x, y) \leq \delta$  y  $d(f, g) \leq \delta$ , entonces  $d(f(x), g(y)) \leq \varepsilon$ . En particular, poniendo  $f = g$ , obtenemos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para todos  $x, y \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ , si  $d(x, y) \leq \delta$  entonces  $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ ; es decir,  $\mathcal{F}$  es equicontinuo. Por otro lado, como la función  $\pi_x : \mathcal{F} \rightarrow Y$ ,  $\pi_x(f) = f(x)$  es continua y  $\mathcal{F}$  es compacto, se tiene que que  $\mathcal{F}_x = \pi_x(\mathcal{F})$  es compacto en  $Y$ ; es decir  $\mathcal{F}$  es puntualmente compacto, y en particular es también puntualmente relativamente compacto.

( $\Leftarrow$ ): Ésta es la parte realmente interesante. Si  $(f_n)$  es una sucesión de  $\mathcal{F}$ , veremos que  $(f_n)$  tiene una subsucesión convergente a una función  $f$  en  $\mathcal{F}$ . Como  $\mathcal{F}$  es puntualmente compacto esto puede hacerse en cada punto  $x \in K$ . Usando la equicontinuidad de  $\mathcal{F}$ , la compacidad de  $K$  y un argumento de diagonalización, veremos que puede obtenerse convergencia uniforme.

Como  $K$  es compacto es totalmente acotado, y así, para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar un subconjunto finito  $C_n$  de  $K$  tal que cualquier punto de  $K$  está a distancia menor que  $1/n$  de algún punto de  $C_n$ . Definamos

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,$$

y puesto que  $C$  es numerable escribamos

$$C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como  $\overline{\mathcal{F}_{x_1}}$  es compacto, la sucesión  $(f_n(x_1))$  tiene una subsucesión convergente en  $Y$ , que denotaremos

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1), \dots$$

A su vez, como  $(f_{1k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  y  $\overline{\mathcal{F}_{x_2}}$  es compacto, la sucesión  $(f_{1k}(x_2))_{k \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión convergente en  $Y$ , que denotamos

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \dots, f_{2n}(x_2), \dots$$

Continuando el proceso de esta manera, obtenemos una sucesión de subsucesiones de  $(f_n)$ , a saber,  $(f_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de tal manera que  $(f_{(n+1)k})_{k \in \mathbb{N}}$  es subsucesión de  $(f_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y la sucesión  $(f_{nk}(x_n))_{k \in \mathbb{N}}$  converge en  $Y$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Definamos ahora  $g_n = f_{nn}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  (ésta es la diagonal de la matriz infinita  $(f_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ ). Es claro que para todo  $m \in \mathbb{N}$  la sucesión  $(g_n)_{n \geq m}$  es una subsucesión de la subsucesión  $(f_{mk})_{k \in \mathbb{N}}$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ , y por tanto la sucesión  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $Y$  para todo  $x \in C$ .

Probaremos que de hecho la sucesión  $(g_n(x))$  converge en todo punto  $x \in K$ , y que la convergencia es uniforme (en particular la función límite  $x \mapsto f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  será continua), lo cual demostrará que  $(g_n)$  converge a  $f$  en  $C(K, Y)$  y, como  $\mathcal{F}$  es cerrado, también que  $g_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{F}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , y elijamos  $\delta > 0$  como en la definición de equicontinuidad de  $\mathcal{F}$ . Sea  $C_\delta = \{y_1, \dots, y_k\}$  un subconjunto finito de  $C$  tal que todo punto de  $K$  esté a distancia menor que  $\delta$  de algún punto de  $C_\delta$  (es decir, tómesese  $C_\delta = C_{n_\delta}$  con  $n_\delta > 1/\delta$ ). Puesto que las sucesiones

$$(g_n(y_1))_{n \in \mathbb{N}}, (g_n(y_2))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n(y_k))_{n \in \mathbb{N}}$$

son todas convergentes, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N$  entonces

$$d(g_n(y_j), g_m(y_j)) \leq \varepsilon/3$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, k$ . Ahora, para cada  $x \in K$ , podemos tomar  $y_x \in C_\delta$  tal que  $d(x, y_x) \leq \delta$ , luego por la hipótesis de equicontinuidad se tiene que

$$d(g_n(x), g_n(y_x)) \leq \varepsilon/3$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto, si  $n, m \geq N$ , tenemos

$$d(g_n(x), g_m(x)) \leq d(g_n(x), g_n(y_x)) + d(g_n(y_x), g_m(y_x)) + d(g_m(y_x), g_m(x)) \leq \varepsilon.$$

Así hemos visto que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N$  entonces

$$d(g_n(x), g_m(x)) \leq \varepsilon \tag{3.1}$$

para todo  $x \in K$ . En particular  $(g_n(x))$  es de Cauchy en  $Y$  para cada  $x \in K$ , y como  $(g_n(x)) \subset \mathcal{F}_x \subseteq \overline{\mathcal{F}_x}$  y  $\overline{\mathcal{F}_x}$  es completo (por ser compacto), se deduce que  $(g_n(x))$  converge para cada  $x \in K$ . Si denotamos

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x),$$

fijando  $n \in \mathbb{N}$  y tomando límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en (3.1), deducimos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$  entonces

$$d(g_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

para todo  $x \in K$ , lo cual significa que  $(g_n)$  converge a  $f$  uniformemente en  $K$ , y en particular  $f \in C(K, Y)$  y  $g_n \rightarrow f$  en  $C(K, Y)$ . Por último, como  $\mathcal{F}$  es cerrado en  $C(K, Y)$ , se tiene que  $f \in \mathcal{F}$ .  $\square$

El teorema anterior lo aplicaremos en el siguiente caso concreto.

**Corolario 3.7.** *Sea  $I$  un intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$ , y  $\mathcal{B}$  un subconjunto equicontinuo y puntualmente acotado de  $C(I, \mathbb{R}^n)$ . Entonces toda sucesión de  $\mathcal{B}$  tiene una subsucesión uniformemente convergente a una función de  $C(I, \mathbb{R}^n)$ .*

Como es natural, decir que  $\mathcal{B}$  es puntualmente acotado significa que  $\mathcal{B}_x := \{f(x) : f \in \mathcal{B}\}$  es acotado en  $\mathbb{R}^n$  para cada  $x \in K$ .

*Demostración.* La demostración de la implicación  $(\Leftarrow)$  en el teorema anterior se aplica directamente a este caso. Otra forma de verlo es usar que los subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^n$  son relativamente compactos, y aplicar directamente el enunciado del Teorema 3.6.  $\square$



### 3.2. El método de Euler y el teorema de Peano.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde  $f : I \times U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, y  $x_0 \in U$ .

Sea  $a > 0$  tal que  $[t_0, t_0 + a] \subset I$ , y dividamos el intervalo  $[t_0, t_0 + a]$  en  $k$  subintervalos de igual longitud  $[t_j, t_{j+1}]$  denotando  $t_j = t_0 + jh$ , donde  $h := a/k$ , para  $j = 0, 1, \dots, k$ . Definamos una solución aproximada  $x_k$  de (3.2) poniendo  $x_k(t_0) = x_0$  y, para  $j \geq 0$ , definiendo  $x_k$  de manera recursiva en los puntos  $t_j$  por

$$x_k(t_{j+1}) = x_k(t_j) + f(t_j, x_k(t_j))h,$$

y en los demás puntos mediante interpolación lineal, es decir,

$$x_k(t) = x_k(t_j) + f(t_j, x_k(t_j))(t - t_j) \text{ si } t \in [t_j, t_{j+1}].$$

A las curvas  $x_k : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , así obtenidas se les llama *poligonales de Euler*.

Sea ahora  $\delta > 0$  tal que  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta) \subset U$ , y definamos

$$M = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta)\}, \text{ y } a = \delta/M.$$

**Proposición 3.8.** *Con la notación anterior, se tiene que:*

1.  $x_k : [t_0, t_0 + a] \rightarrow B(x_0, \delta)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .
2.  $x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s))ds + R_k(t)$ , donde  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k\|_\infty = 0$ .
3. Si una subsucesión de  $(x_k)$  converge uniformemente a una función  $x : [t_0, t_0 + a] \rightarrow B(x_0, \delta)$  entonces  $x$  es solución de (3.2).
4. La familia de funciones  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  es equicontinua y acotada en  $(C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ .

*Demostración.* Observando que  $x_k(t_0) = x_0$  y  $x_k(t_{j+1}) = x_k(t_j) + f(t_j, x_k(t_j))h$  para cada  $j = 0, 1, \dots, k$ , se tiene que  $\|x_k(t_1) - x_0\| \leq \|f(t_0, x_0)\|h \leq Mh$ , luego  $x_k(t_1) \in B(x_0, Mh) \subset B(x_0, \delta)$ ; entonces  $\|x_k(t_2) - x_k(t_1)\| \leq \|f(t_1, x_k(t_1))\|h \leq Mh$ , luego  $x_k(t_2) \in B(x_0, 2Mh) \subset B(x_0, \delta)$ . Continuando el proceso así llegamos en  $k - 2$  pasos más a que

$$x_k(t_j) \in B(x_0, jMh) \subset B(x_0, \delta)$$

para todo  $j = 1, \dots, k$ . Por otro lado, las funciones  $x_k$  son de clase  $C^1$  a trozos y sus derivadas están acotadas por  $\max_{0 \leq j \leq k} \|f(t_j, x_k(t_j))\|$ , que a su vez está acotado por  $M$ , pues como acabamos de comprobar  $x_k(t_j) \in B(x_0, \delta)$  para todo  $j = 0, \dots, k$ . Luego cada  $x_k$  es  $M$ -Lipschitz. Como  $x_k(t_0) = x_0$ , se tiene entonces que

$$\|x_k(t) - x_0\| \leq M|t - t_0| \leq Ma \leq \delta$$

para cada  $t \in [t_0, t_0 + a]$ . Esto prueba la primera propiedad. La cuarta propiedad es consecuencia inmediata de que las funciones  $x_k$  son  $M$ -Lipschitz, con  $M$  independiente de  $k$ : al tenerse

$$\|x_k(t) - x_k(s)\| \leq M|t - s|$$

para todos  $t, s \in [t_0, t_0 + a]$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ , dado cualquier  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $\delta = \varepsilon/M$  de modo que se cumple la definición de equicontinuidad de  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Además, por la primera propiedad,  $\|x_k(t)\| \leq \|x_0\| + \delta$  para todo  $t \in [t_0, t_0 + a]$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ , es decir, que  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  está acotada en  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ .

Demostremos la segunda propiedad. Dado  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ , tenemos

$$\begin{aligned} x_k(t) - x_0 &= \\ f(t_j, x_k(t_j))(t - t_j) &+ f(t_{j-1}, x_k(t_{j-1}))h + \dots + f(t_1, x_k(t_1))h + f(t_0, x_k(t_0))h = \\ \int_{t_j}^t f(t_j, x_k(t_j))ds &+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1}, x_k(t_{j-1}))ds + \dots + \int_{t_0}^{t_1} f(t_0, x_k(t_0))ds = \\ \int_{t_0}^t f(s, x_k(s))ds &+ R_k(t), \end{aligned}$$

donde el resto  $R_k(t)$  viene dado por

$$R_k(t) = \int_{t_j}^t (f(t_j, x_k(t_j)) - f(s, x_k(s))) ds + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t_i, x_k(t_i)) - f(s, x_k(s))) ds. \quad (3.3)$$

Para ver que  $R_k(t)$  converge a 0 uniformemente en  $t \in [t_0, t_0 + a]$ , observemos que  $f$  es uniformemente continua en el compacto  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta)$ , así que, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $r > 0$  tal que si  $(t, x), (s, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta)$  y  $|t - s| \leq r$  y  $\|x - y\| \leq r$  entonces

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq \varepsilon/a.$$

Puesto que, para  $s \in [t_i, t_{i+1}]$  se tiene

$$\|x_k(t_i) - x_k(s)\| = \|f(t_i, x_k(t_i))(s - t_i)\| \leq Mh = Ma/k,$$

podemos escoger  $k_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande para que  $\max\{Ma/k, a/k\} \leq r$  si  $k \geq k_0$ , y por tanto obtener

$$\|f(t_i, x_k(t_i)) - f(s, x_k(s))\| \leq \varepsilon/a$$

si  $k \geq k_0$ , lo que combinado con (3.3) muestra que

$$\|R_k(t)\| \leq \int_{t_j}^t \frac{\varepsilon}{a} ds + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\varepsilon}{a} ds \leq j \frac{\varepsilon}{a} h \leq k \frac{\varepsilon}{a} h = \varepsilon$$

para todo  $k \geq k_0$  y todo  $t \in [t_0, t_0 + a]$ .

Finalmente demostremos la tercera propiedad. Supongamos por comodidad de notación que la propia sucesión  $(x_k)$  converge a una función  $x$  uniformemente en  $[t_0, t_0 + a]$ . Como  $x_k(t) \in B(x_0, \delta)$  para todo  $t$  en este intervalo y todo  $k \in \mathbb{N}$ , y puesto que  $f$  es uniformemente continua en  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta)$ , se deduce que  $f(t, x_k(t))$  converge a  $f(t, x(t))$  uniformemente en  $t \in [t_0, t_0 + a]$ . Entonces, tomando límites en la igualdad

$$x_k(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_k(s))ds + R_k(t),$$

y usando que  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(t) = 0$ , deducimos que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$$

para todo  $t \in [t_0, t_0 + a]$ , lo que como ya sabemos equivale a decir que  $x$  es solución de (3.2) en  $[t_0, t_0 + a]$ .  $\square$

Lo mismo que se ha hecho en el intervalo  $[t_0, t_0 + a]$  para construir una solución de (3.2), con cambios evidentes, puede hacerse en el intervalo  $[t_0 - a, t_0]$ , obteniendo así una sucesión de funciones  $x_k$  definidas en  $[t_0 - a, t_0 + a]$  que satisfacen las propiedades de la proposición anterior en este intervalo en lugar de  $[t_0, t_0 + a]$ . Aplicando el corolario del teorema de Arzela-Ascoli 3.7 al conjunto de poligonales de Euler  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  definidas en el intervalo  $[t_0 - a, t_0 + a]$ , se deduce entonces el siguiente resultado.

**Teorema 3.9** (Peano). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Dados  $x_0 \in U$  y  $\delta > 0$  tal que

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta) \subset I \times U,$$

existe al menos una solución  $x : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow B(x_0, \delta)$  del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en donde

$$a := \frac{\delta}{M}, \quad M := \max_{(t,x) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(x_0, \delta)} \|f(t, x)\|.$$

En general, como vimos en el Capítulo 1, las soluciones de (3.2) dadas por el teorema anterior no serán únicas, y puede haber diferentes subsucesiones de la sucesión  $(x_k)$  de poligonales de Euler que converjan a soluciones diferentes. Sin embargo, es interesante observar que, cuando  $f$  es localmente Lipschitz, la propia sucesión  $(x_k)$  de poligonales de Euler converge a la única solución de (3.2) en el intervalo  $[t_0, t_0 + a]$ .

**Teorema 3.10** (convergencia del método de Euler). En las mismas condiciones del teorema de Peano, si  $f$  es Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de la variable  $t$ , en el conjunto  $[t_0 - a, t_0 + a + \varepsilon] \times B(x_0, \delta)$ , entonces  $x_k$  converge uniformemente (cuando  $k \rightarrow \infty$ ) a la única solución de (3.2) en  $[t_0 - a, t_0 + a]$ .

*Demostración.* Podemos suponer  $t_0 = 0$  sin pérdida de generalidad. Sea  $L > 0$  tal que  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$  para todo  $(t, x), (t, y) \in [-a, +a] \times B(x_0, \delta)$ . Usando las dos primeras propiedades de la Proposición 3.8, tenemos

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_j(t)\| &= \left\| \int_0^t (f(s, x_k(s)) - f(s, x_j(s))) ds + R_k(t) - R_j(t) \right\| \\ &\leq \|R_k(t) - R_j(t)\| + \int_0^t \|f(s, x_k(s)) - f(s, x_j(s))\| ds \\ &\leq \|R_k - R_j\|_\infty + \int_0^t L \|x_k(s) - x_j(s)\| ds. \end{aligned}$$

Entonces, usando la desigualdad de Gronwall en la versión del Corolario 2.7 (con  $a = \|R_k - R_j\|_\infty$ ,  $b = L$  y  $c = 0$ ) obtenemos que

$$\|x_k(t) - x_j(t)\| \leq \|R_k - R_j\|_\infty e^{Lt} \leq \|R_k - R_j\|_\infty e^{La}$$

para todo  $t \in [-a, a]$ , y por tanto

$$\|x_k - x_j\|_\infty \leq \|R_k - R_j\|_\infty e^{La},$$

de donde se deduce que la sucesión  $(x_k)$  es de Cauchy en  $(C([-a, a], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  ya que  $(R_k)$  lo es. Como el espacio  $(C([-a, a], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  es completo, resulta que  $(x_k)$  converge a una función  $x$  en  $(C([-a, a], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ . Es decir,  $(x_k)$  converge a  $x$  uniformemente en  $[-a, a]$ . Pero por la Proposición 3.8(3), esto implica que  $x$  es solución de (3.2).

Veamos que  $x$  es la única solución de este problema en el intervalo  $[-a, a]$ . Por la demostración del teorema de Picard-Lindelöf 2.4 sabemos que esto es así en un intervalo  $[-T, T]$ , con

$$T < \min\left\{\frac{\delta}{M+1}, \frac{1}{L}\right\} \leq a.$$

Sea

$$\alpha := \sup\{s \in [0, a] : (3.2) \text{ tiene solución única en } [0, s]\}.$$

Sabemos que  $0 < \alpha \leq a$ , y deseamos ver que  $\alpha = a$ ; supongamos que  $\alpha < a$  y llegaremos a una contradicción. Planteamos el problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(\alpha) = x(\alpha). \end{cases} \quad (3.4)$$

Un análisis cuidadoso de la demostración del teorema de Peano demuestra que, para cualquier  $b \in (0, a)$ , existe un  $r > 0$  tal que

$$x_k(t) \in B(x_0, \delta - r)$$

para todo  $t \in [0, b]$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ ; esto implica que

$$x(t) \in B(x_0, \delta - r)$$

para todo  $t \in [0, b]$ . Aplicando esto con  $\alpha = b$ , tenemos en particular que

$$\|x(\alpha) - x_0\| \leq \delta - r,$$

y entonces, como  $x(\alpha) \in B(x_0, \delta - r) \subset B(x_0, \delta)$  y  $f$  es Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de la variable  $t$ , en el conjunto  $[t_0 - a, t_0 + a] \times B(x_0, \delta)$ , podemos aplicar el teorema de Picard-Lindelöf para encontrar un  $\beta \in (\alpha, a)$  tal que el problema (3.4) tiene solución única en  $[\alpha, \beta]$ . Si fuera  $\alpha < a$ , entonces existiría una solución  $z(t)$  de (3.2), definida en  $[-a, a]$ , diferente de  $x(t)$  en el intervalo  $(\alpha, a]$ , pero igual a  $x(t)$  en el intervalo  $[0, \alpha]$ , y por tanto también igual a  $x(t)$  (por continuidad de ambas funciones) en el intervalo  $[0, \alpha]$ . Pero entonces  $z(t)$  sería solución de (3.4) en  $[\alpha, \beta]$ , y por la unicidad de las soluciones de este problema en este intervalo, concluiríamos que  $x(t) = z(t)$  en  $[\alpha, a]$ , una contradicción.  $\square$

**Observación 3.11.** En vista de los ejemplos elementales presentados en el capítulo 1, podría pensarse que el conjunto de puntos  $(t_0, x_0)$  donde puede fallar la unicidad de las soluciones de (3.2) debe ser pequeño. Nada más lejos de la realidad: pueden construirse funciones continuas  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tales que para toda elección de  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ , el problema (3.2) tiene al menos dos soluciones en cada intervalo de la forma  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , donde  $\varepsilon > 0$  es arbitrario. Ver las páginas 18-23 del libro de Hartman [6].

### 3.3. Prolongabilidad de soluciones

En toda esta sección consideraremos el PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo  $\Omega$  abierto, y supondremos que este problema tiene solución única local para cada par  $(t_0, x_0) \in \Omega$  (lo que, como ya sabemos, sucede por ejemplo cuando  $f$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de la variable  $t$ ).

El intervalo de definición  $[-\alpha, \alpha]$  de una solución  $x$  de (3.5) que proporciona el teorema de Peano (o el de Picard Lindelöf, que es incluso menor) en general no es óptimo: puede ocurrir que exista una solución  $\tilde{x}$  de (3.5) definida en un intervalo mayor (por ejemplo, si consideramos  $x'(t) = x(t)$ ,  $x(0) = 1$ , la solución  $x(t)$  dada por el teorema de Peano está definida en  $[-1, 1]$ , pero realmente puede extenderse a todo  $\mathbb{R}$ , porque  $\tilde{x}(t) = e^t$  es solución de este problema). Sin embargo, la unicidad local de las soluciones nos garantiza que  $x = \tilde{x}$  en su intervalo común de definición.

**Lema 3.12.** Sean  $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluciones de (3.5). Entonces  $x_1(t) = x_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ .

*Demostración.* Por comodidad de notación supongamos  $t_0 = 0$ . Denotemos  $\alpha_j = \inf I_j$ ,  $\beta_j = \sup I_j$ ,  $j = 1, 2$ . Supongamos por ejemplo que  $\beta_1 \leq \beta_2$ . Sea  $\beta = \sup\{\delta \in [0, \beta_1] : x_1 = x_2 \text{ en } [0, \delta]\}$ . Si fuera  $\beta < \beta_1$  entonces, puesto que  $x_1(t) = x_2(t)$  para todo  $t \in [0, \beta)$ , se tendría por continuidad de  $x_1, x_2$  que también  $x_1(\beta) = x_2(\beta)$ . Como el problema  $\{y'(t) = f(t, y(t)), y(\beta) = x_1(\beta) = x_2(\beta)\}$  tiene solución única en un intervalo  $[\beta - r, \beta + r]$  para algún  $r > 0$ , y obviamente  $x_1, x_2$  son soluciones de dicho problema en dicho intervalo (al menos cuando  $r < \beta_1 - \beta$ , lo que podemos suponer que se cumple), se deduciría que  $x_1 = x_2$  en  $[\beta - r, \beta + r]$ , y por tanto también  $x_1 = x_2$  en  $[0, \beta + r]$ , lo que contradice la definición de  $\beta$ . Por tanto  $\beta = \beta_1$  y  $x_1 = x_2$  en  $[0, \beta_1] = I_1 \cap I_2 \cap [0, \infty)$ . Análogamente se prueba que  $x_1 = x_2$  en  $I_1 \cap I_2 \cap (-\infty, 0]$ , y por consiguiente  $x_1 = x_2$  en  $I_1 \cap I_2$ .  $\square$

**Proposición 3.13.** *Sea  $I_{(t_0, x_0)}$  la unión de todos los intervalos  $I$  tales que  $t_0 \in I$  y existe una solución  $x_I : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (3.5). Entonces se tiene que:*

1.  $I_{(t_0, x_0)}$  es un intervalo abierto.
2. Existe una única solución  $x$  de (3.5) definida en  $I_{(t_0, x_0)}$ .
3.  $I_{(t_0, x_0)}$  es el mayor intervalo de  $\mathbb{R}$  sobre el que puede definirse una solución de (3.5).

A  $x$  se le llama la solución maximal de (3.5).

*Demostración.*  $I_{(t_0, x_0)}$  es un intervalo por ser unión de una familia de intervalos con un mismo punto  $t_0$  en común. Veamos que es un intervalo abierto. Sea  $s_0 \in I_{(t_0, x_0)}$ , entonces existe una solución  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (3.5) definida en un intervalo  $I$  con  $s_0 \in I$ . Como  $(s_0, \varphi(s_0)) \in \Omega$  y  $\Omega$  es abierto, y estamos suponiendo existencia y unicidad local de soluciones de  $y'(t) = f(t, y(t))$ , existen  $\varepsilon > 0$  y  $\psi : (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$  y  $\psi(s_0) = \varphi(s_0)$ . Por el lema anterior, tenemos que  $\psi = \varphi$  en el intervalo  $I \cap (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ . Entonces podemos definir  $z : I \cup (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$z(t) = \begin{cases} z(t) = \varphi(t) & \text{si } t \in I \\ z(t) = \psi(t) & \text{si } t \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon), \end{cases}$$

y es inmediato ver que  $z$  es solución de (3.5). Por definición de  $I_{(t_0, x_0)}$ , esto implica que  $I \cup (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset I_{(t_0, x_0)}$ . En particular se tiene  $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset I_{(t_0, x_0)}$ , y esto prueba que  $I_{(t_0, x_0)}$  es abierto.

Ahora definamos  $x : I_{(t_0, x_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$x(t) = x_I(t) \text{ si } t \in I \text{ para algún intervalo } I \text{ tal que existe una solución } x_I : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de (3.5).}$$

Por el lema anterior, si  $t \in I \cap J$  para dos soluciones  $x_I : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_J : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (3.5), entonces  $x_I(t) = x_J(t)$ , luego  $x$  está bien definida, y es inmediato que  $x$  es solución de (3.5).

Por último, es obvio por la construcción de  $I_{(t_0, x_0)}$  que no puede haber una solución de (3.5) que esté definida en un intervalo mayor.  $\square$

Conviene observar que el intervalo  $I_{(t_0, x_0)}$  depende fuertemente del dominio  $\Omega$  de definición de  $f$  que se esté considerando.

**Observación 3.14.** Un argumento de *zornicación* prueba que, aún cuando no haya unicidad local de las soluciones de (3.5), sino solamente existencia (por ejemplo si  $f$  es continua), existen soluciones maximales<sup>1</sup> (es decir, definidas en un intervalo tal que no puede haber otro que lo contenga estrictamente y en el que haya definida una solución) de (3.5).

<sup>1</sup>En efecto, sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de las soluciones de (3.5), y para cada par de soluciones  $x_I : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_J : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (3.5), considérese la relación  $x_I \preceq x_J \iff I \subseteq J$  y  $x_I = x_J$  en  $I$ . No es difícil ver que  $\preceq$  es una relación de orden parcial en  $\mathcal{A}$ , y que todo subconjunto totalmente ordenado de  $(\mathcal{A}, \preceq)$  tiene una cota superior. Entonces, por el lema de Zorn,  $\mathcal{A}$  contiene al menos un elemento maximal, al que podemos llamar una solución maximal de (3.5). Sin embargo, cuando no hay unicidad local, las soluciones maximales no son únicas.

A continuación vamos a estudiar la cuestión de cómo decidir si una solución de (3.5) puede ser extendida a un intervalo mayor o no.

**Teorema 3.15.** *Sea  $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una solución de (3.5). Entonces existe una extensión de esta solución a un intervalo  $(\alpha, \beta + \varepsilon)$  para algún  $\varepsilon > 0$  si y sólo si existe una sucesión  $(t_k) \subset (\alpha, \beta)$  tal que existe*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, \varphi(t_k)) = (\beta, y) \in \Omega.$$

*Análogamente, existe una extensión de esta solución a un intervalo  $(\alpha - \varepsilon, \beta)$  para algún  $\varepsilon > 0$  si y sólo si existe una sucesión  $(s_k) \subset (\alpha, \beta)$  tal que existe*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (s_k, \varphi(s_k)) = (\alpha, z) \in \Omega.$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ): es evidente.

( $\Leftarrow$ ): Veamos que de hecho se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = y. \quad (3.6)$$

Como  $\Omega$  es abierto, existe  $\delta > 0$  tal que  $[\beta - \delta, \beta + \delta] \times B(y, \delta) \subset \Omega$ . Sea

$$M := \max_{(t,x) \in [\beta - \delta, \beta + \delta] \times B(y, \delta)} \|f(t, x)\|.$$

Podemos suponer, tomando una subsucesión de  $(t_k)$  si fuera necesario, que  $t_k \in (\beta - \delta, \beta)$ ,  $\varphi(t_k) \in B(y, \delta)$ , y  $t_k < t_{k+1}$  para todo  $k$ . Si (3.6) fuera falso, existirían una sucesión  $s_k \nearrow \beta$  y un número  $r > 0$  tal que

$$\|\varphi(s_k) - y\| \geq r > 0$$

para todo  $k$ . Podemos suponer, tomando una subsucesión si hiciera falta, que  $t_k \leq s_k$  para todo  $k$ . Ahora, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , distingamos dos casos: 1) si  $\varphi(t) \in B(y, \delta)$  para todo  $t \in [t_k, s_k]$  no hacemos nada; 2) en caso contrario, considerando la función  $h(t) = \|\varphi(t) - y\| - \delta$  y definiendo  $s'_k := \sup\{s \in [t_k, s_k] : h(t) \leq 0 \text{ para todo } t \in [t_k, s]\}$ , se tiene que  $h(s'_k) = 0$  y  $h(s) \leq 0$  para todo  $s \in [t_k, s'_k]$ ; en este segundo caso cambiamos  $s_k$  por  $s'_k$ , y así podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $r \leq \delta$  y que

$$\varphi(t) \in B(y, \delta) \text{ para todo } t \in [t_k, s_k].$$

Entonces tenemos

$$0 < r \leq \|\varphi(s_k) - y\| \leq \|\varphi(s_k) - \varphi(t_k)\| + \|\varphi(t_k) - y\| \leq \int_{t_k}^{s_k} \|f(t, \varphi(t))\| dt + \|\varphi(t_k) - y\| \leq M|s_k - t_k| + \|\varphi(t_k) - y\|.$$

De aquí se desprende una contradicción, ya que el término de la derecha de la desigualdad tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ . Esto prueba (3.6).

Ahora veamos que existe una tal extensión. Puesto que estamos suponiendo la existencia y unicidad local de soluciones de  $z'(t) = f(t, z(t))$ , existen  $\varepsilon > 0$  y  $\psi : (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$  y  $\psi(\beta) = y$ . Definamos entonces  $\xi : (\alpha, \beta + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in (\alpha, \beta) \\ \psi(t) & \text{si } t \in [\beta, \beta + \varepsilon) \end{cases}$$

Por (3.6) se tiene que  $\xi$  es continua. Por supuesto  $\xi$  es derivable en  $(\alpha, \beta + \varepsilon) \setminus \{\beta\}$ , y cumple  $\xi'(t) = f(t, \xi(t))$  en este intervalo. Además en  $t = \beta$  la función  $\xi$  también es derivable: en efecto, existen

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \xi'(t) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} f(t, \varphi(t)) = f(\beta, y)$$

y también

$$\lim_{t \rightarrow \beta^+} \xi'(t) = \lim_{t \rightarrow \beta^+} \psi'(t) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} f(t, \psi(t)) = f(\beta, y),$$

y son iguales, y  $\xi$  es continua, lo cual implica (por el teorema del valor medio, aplicado coordenada a coordenada) que existe

$$\xi'(\beta) = f(\beta, y) = f(\beta, \xi(\beta)).$$

Por tanto  $\xi'(t) = f(t, \xi(t))$  para todo  $t \in (\alpha, \beta + \varepsilon)$ , y como  $\xi(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$ , concluimos que  $\xi$  es solución de (3.5).  $\square$

A continuación enunciamos algunos corolarios del teorema anterior, cuyas demostraciones son fáciles y se proponen como ejercicios para el lector.

**Corolario 3.16.** *Sea  $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una solución de (3.5), y supongamos que existe un compacto de la forma  $[t_0, \beta] \times K$  contenido en  $\Omega$  y tal que  $\varphi(t_k) \in K$  para todo  $k$ , siendo  $(t_k)$  una sucesión contenida en  $(\alpha, \beta)$  que converge a  $\beta$ . Entonces  $\varphi$  puede prolongarse como solución a un intervalo de la forma  $(\alpha, \beta + \varepsilon)$ , para algún  $\varepsilon > 0$ .*

*En particular, si existe un tal compacto  $K = K_\beta$  para cada  $\beta > t_0$ , entonces existe una única solución de (3.5) definida en  $(\alpha, \infty)$ .*

Por supuesto, existen resultados similares que dan extensiones a intervalos de la forma  $(\alpha - \varepsilon, \beta)$  o  $(-\infty, \beta)$ ; se invita al lector a formularlos.

**Corolario 3.17.** *Sea  $I_{(t_0, x_0)} = (T_-, T_+)$  el intervalo de definición de la solución maximal  $x$  de (3.5). Supongamos que  $T_+ < \infty$ . Entonces  $x(t)$  debe salirse, cuando  $t \rightarrow T_+$ , de cualquier compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  con  $[t_0, T_+] \times K \subset \Omega$ . Es decir, para cualquier compacto  $K$  con esta propiedad, existe  $t_K \in (t_0, T_+)$  tal que  $x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus K$  para todo  $t \in (t_K, T_+)$ .*

*En particular, si  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow T_+} \|x(t)\| = \infty$ .*

*Análogamente para  $T_-$ .*

**Corolario 3.18.** *Sea  $x : I_0 = (T_-, T_+) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  la solución maximal de la ecuación  $y' = f(t, y(t))$ ,  $y(0) = x_0$ , donde  $f : \mathbb{R} \times U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y se supone existencia y unicidad local. Supongamos también que  $x(t)$  está acotada, que  $\partial U \neq \emptyset$ , y que  $T_+ < +\infty$ . Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow T_+} \text{dist}(x(t), \partial U) = 0.$$

*Por otra parte, si  $U = \mathbb{R}^n$  y  $T_+ < +\infty$ , entonces siempre se tiene  $\lim_{t \rightarrow T_+} \|x(t)\| = \infty$ .*

*Análogamente cuando  $T_- > -\infty$ .*

**Corolario 3.19.** *Sea  $x : (T_-, T_+)$  una solución maximal de la ecuación autónoma  $y' = f(y)$ , donde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial localmente Lipschitz. Supongamos que existe un compacto  $K$  de  $\Omega$  tal que  $x(t) \in K$  para todo  $t \in [0, T_+)$ . Entonces  $T_+ = \infty$ .*

*Análogamente para  $(T_-, 0]$ .*

**Observación 3.20.** Con la notación del Corolario 3.18, si  $T_+ < +\infty$  entonces todo  $z \in \mathbb{R}^n$  obtenido como un límite  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n)$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T_+$  es necesariamente un punto de  $\partial U$ .

Conviene evitar pensar que, en las condiciones del corolario anterior, siempre se tiene que o bien  $\lim_{t \rightarrow T_+} \|x(t)\| = \infty$ , o bien  $\lim_{t \rightarrow T_+} \text{dist}(x(t), \partial U) = 0$ . Puede suceder que, para algunas sucesiones  $t_k \nearrow T_+$  se tenga  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t_k)\| = \infty$  y  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t_k), \partial U) > 0$  a la vez que para otras sucesiones  $s_k \nearrow T_+$  se tenga que existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(s_k) \in \partial U$ .

Lo que sí es verdad en todo caso es lo siguiente.

**Corolario 3.21.** *Sea  $x : I_0 = (T_-, T_+) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  la solución maximal de la ecuación  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(0) = x_0$ , donde  $f : \mathbb{R} \times U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y se supone existencia y unicidad local. Supongamos también que  $\partial U \neq \emptyset$ , y que  $T_+ < +\infty$ . Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow T_+} \min \left\{ \text{dist}(x(t), \partial U), \frac{1}{\|x(t)\|} \right\} = 0.$$

*Análogamente cuando  $T_- > -\infty$ .*

### 3.4. Estabilidad del intervalo de definición respecto de las condiciones iniciales

Vamos a demostrar aquí un resultado de estabilidad de un intervalo cerrado de definición de la solución respecto de las condiciones iniciales: si  $y(t)$  es una solución de  $x'(t) = f(t, x(t))$  con  $y(t_0) = y_0$ , definida en un intervalo  $[t_0, t_1]$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $z_0 \in B(y_0, \delta)$  entonces existe una solución  $z(t)$  de  $x'(t) = f(t, x(t))$  con  $z(t_0) = z_0$ , tal que  $z$  está definida en  $[t_0, t_1]$ .

**Teorema 3.22.** *Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, y supongamos que es localmente Lipschitz en la segunda variable, uniformemente respecto de la primera. Sea  $y(t)$  una solución de  $x'(t) = f(t, x(t))$  con  $y(t_0) = y_0$ , definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , con  $t_0 \in [a, b]$ . Entonces existen números  $k, M, \delta > 0$  tales que si  $|s_0 - t_0| + \|z_0 - y_0\| \leq \delta$  entonces existe una solución  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $x'(t) = f(t, x(t))$  que satisface  $z(s_0) = z_0$ , y también*

$$\|z(t) - y(t)\| \leq M (|s_0 - t_0| + \|z_0 - y_0\|) e^{k|t-t_0|}$$

para todo  $t \in [a, b]$ .

*Demostración.* Sea  $\Gamma \subset I \times U$  la gráfica de la solución  $y$ , es decir,  $\Gamma = \{(t, y(t)) : t \in [a, b]\}$ . Sea  $\Omega_0$  un subconjunto abierto y acotado de  $\Omega$  tal que  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ , y sea  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño para que

$$A := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \text{dist}((t, x), \Gamma) \leq \varepsilon\} \subset \Omega_0.$$

Entonces existe  $k > 0$  tal que  $f$  es  $k$ -Lipschitz en la segunda variable, uniformemente respecto de la primera, en el compacto  $\overline{\Omega_0}$  (la justificación detallada de esta afirmación se propone al lector en el ejercicio 3.25). Sea

$$M := \max_{(t,x) \in \overline{\Omega_0}} \|f(t, x)\|.$$

Entonces podemos elegir  $\delta$  tal que

$$0 < \delta \leq \min \left\{ \frac{1}{2k}, \frac{\varepsilon}{8(M+1)e^{k(b-a)}} \right\}.$$

Si  $|s_0 - t_0| + \|z_0 - y_0\| \leq \delta$  entonces, teniendo en cuenta la definición de  $\delta$  y la Observación 2.5), existe una solución  $z : [s_0 - 2\delta, s_0 + 2\delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la ecuación  $x'(t) = f(t, x(t))$  que satisface  $z(s_0) = z_0$ ; en particular  $z(t)$  está definida en  $t_0$ , puesto que  $|t_0 - s_0| \leq \delta$ . Sea  $(\alpha, \beta)$  el intervalo maximal de existencia de  $z(t)$  relativo<sup>2</sup> al abierto  $\Omega_0$ . Queremos probar que  $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ . Supongamos por ejemplo que fuera  $\beta \leq b$ , entonces tendríamos (nótese que  $\beta > t_0$ ) que para todo  $t \in [t_0, \beta)$ ,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad z(t) = z_0 + \int_{s_0}^t f(s, z(s)) ds,$$

de donde

$$\begin{aligned} \|z(t) - y(t)\| &= \|z_0 - y_0 + \int_{s_0}^t f(s, z(s)) ds + \int_{t_0}^t (f(s, z(s)) - f(s, y(s))) ds\| \leq \\ &\|z_0 - y_0\| + M|s_0 - t_0| + k \int_{t_0}^t \|z(s) - y(s)\| ds. \end{aligned}$$

Entonces por la desigualdad de Gronwall deducimos que

$$\|z(t) - y(t)\| \leq (\|z_0 - y_0\| + M|s_0 - t_0|) e^{k|t-t_0|} \leq (M+1) (\|z_0 - y_0\| + |s_0 - t_0|) e^{k(b-a)} \leq \varepsilon,$$

<sup>2</sup>Es importante recalcar que este intervalo maximal de existencia se refiere al problema de valor inicial en que  $f$  queda restringida al abierto  $\Omega_0$ , en el cual tenemos acotaciones adecuadas de  $f(t, x)$  y de su constante de Lipschitz respecto de la variable  $x$ . El argumento no sería válido si se considerara  $(\alpha, \beta)$  como el intervalo maximal de definición de la solución al mismo problema de valor inicial sin restricción en el dominio de  $f$ .



donde en la última desigualdad hemos usado la definición de  $\delta$ . Pero entonces la gráfica de  $(t, z(t))$ ,  $t \in [t_0, \beta)$ , queda dentro del compacto  $A$ , que a su vez está contenido en el interior de  $\Omega_0$ , en contradicción con el Corolario 3.17 y la definición de  $(\alpha, \beta)$  como intervalo maximal de existencia de  $z(t)$  relativo al abierto  $\Omega_0$ . Por tanto  $\beta > b$ , y así  $z(t)$  está definida en  $[s_0, b]$ . Análogamente se prueba que  $\alpha < a$ , y por tanto  $z(t)$  también está definida en  $[a, s_0]$ . Luego  $z(t)$  está definida al menos en  $[a, b]$ .

Volviendo a aplicar la desigualdad de Gronwall, ahora en  $[a, b]$ , obtenemos también que

$$\|z(t) - y(t)\| \leq M (|s_0 - t_0| + \|z_0 - y_0\|) e^{k|t-t_0|}$$

para todo  $t \in [a, b]$ . □

**Observación 3.23.** Con la notación del flujo, el teorema anterior prueba en particular que, si  $t \mapsto \phi(t, x_0)$  está definida al menos en  $[a, b]$  y consideramos una sucesión  $x_k \rightarrow x_0$ , entonces existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq k_0$  la curva  $t \mapsto \phi(\cdot, x_k)$  está definida al menos en  $[a, b]$ , y esta sucesión de curvas  $\{\phi(\cdot, x_k)\}_{k \geq k_0}$  converge a la curva  $\phi(\cdot, x_0)$  uniformemente en el intervalo  $[a, b]$ . Como veremos más adelante, esto también implica que el dominio del flujo es un abierto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

### 3.5. Existencia de soluciones globales

En esta sección exponemos un resultado que garantiza, bajo ciertas condiciones sobre el crecimiento de  $f$ , que las soluciones maximales de una ecuación  $x'(t) = f(t, x(t))$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . Cuando el intervalo de definición de la solución maximal de un PVI  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$  es todo  $\mathbb{R}$ , se dice que esta es una *solución global*.

**Teorema 3.24.** Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz en la segunda variable, uniformemente respecto de la primera, y supongamos que para cada  $T > 0$  existen constantes  $A(T), B(T) \geq 0$  tales que

$$\|f(t, x)\| \leq A(T) + B(T)\|x\| \text{ para todo } (t, x) \in [-T, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Entonces, para cada  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , la solución maximal de  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$  está definida en todo  $\mathbb{R}$  (es decir, es una solución global).

*Demostración.* Denotemos el intervalo maximal de existencia  $I_{(t_0, x_0)} = (T_-, T_+)$ . Podemos suponer que  $t_0 = 0$  y  $B(T) > 0$  (por ejemplo, sustituyendo  $B(T)$  por  $\max\{1, B(T)\}$ ). Si  $T_+$  fuera finito se tendría

$$\|x(t)\| = \|x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds\| \leq \|x_0\| + \int_0^t (A(T_+) + B(T_+)\|x(s)\|) ds$$

para cada  $t \in [0, T_+)$ . Gracias a la desigualdad de Gronwall (Corolario 2.7) deduciríamos que

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{B(T_+)T_+} + \frac{A(T_+)}{B(T_+)} (e^{B(T_+)T_+} - 1).$$

Esto implicaría que  $x([0, T_+))$  estaría contenido en una bola, lo que contradice la conclusión del Corolario 3.17. □

Otros resultados importantes sobre existencia global de soluciones se proponen en los problemas 3.10, 3.11 y 3.12.

### 3.6. Problemas

**Problema 3.1.** Consideremos la ecuación  $x'(t) = t^{1/3} \sqrt{|x|(t^2 + x^2)}$  ¿Para qué valores iniciales  $(t_0, x_0)$  puede asegurarse la existencia y unicidad de soluciones locales? ¿Y la existencia al menos? ¿Qué sucede si  $x_0 = 0$ ?

**Problema 3.2.** Sea  $f(x) = x \log |x|$  si  $x \neq 0$ , y  $f(0) = 0$ . Probar que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , pero no es localmente Lipschitz en ningún entorno de 0. A pesar de ello, probar que el PVI  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = 0$  tiene solución única.

**Problema 3.3.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que, para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene que  $f(t, x) < 0$  si  $x > \alpha$ , y  $f(t, x) > 0$  si  $x < \beta$ . Probar que todas las soluciones maximales de  $x'(t) = f(t, x(t))$  están definidas hasta  $+\infty$ .

**Problema 3.4.** Estudiar para qué valores iniciales las siguientes ecuaciones admiten solución local, y cuándo la solución es única.

1.  $x' = \arcsen(t + x)$
2.  $x' = \sqrt{1 - (x^2 + t^2)}$
3.  $xx'' = 1$
4.  $tx'' - tx' + 2 = \frac{1}{t-1} + \log |t - 2|$ .

**Problema 3.5.** Demostrar el Corolario 3.16.

**Problema 3.6.** Demostrar el Corolario 3.17.

**Problema 3.7.** Demostrar el Corolario 3.18.

**Problema 3.8.** Hacer un esbozo del diagrama de fases de una ecuación autónoma  $x'(t) = f(x(t))$ , con  $f$  definida en un abierto  $U$  del plano  $\mathbb{R}^2$ , para la que existan soluciones  $x(t)$  con la siguiente propiedad: para algunas sucesiones  $t_k \nearrow T_+$  se tiene  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t_k)\| = \infty$  y  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t_k), \partial U) > 0$ , a la vez que para otras sucesiones  $s_k \nearrow T_+$  se tiene que existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(s_k) \in \partial U$ .

**Problema 3.9.** Demostrar el Corolario 3.21.

**Problema 3.10.** Demostrar la siguiente variante del Teorema 3.24:

Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz en la segunda variable, uniformemente respecto de la primera, y supongamos que existen funciones  $A, B : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  que son localmente integrables y satisfacen

$$\|f(t, x)\| \leq A(t) + B(t)\|x\| \text{ para todo } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Entonces, para cada  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , la solución maximal de  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ .

**Problema 3.11** (Otra versión más de la desigualdad de Gronwall). Sea  $g(t)$  una función definida en  $\mathbb{R}$ , localmente Lipschitz, y sea  $\rho(t)$  la única solución (que suponemos definida en  $[t_0, t_1]$ ) del p.v.i.

$$\begin{cases} \rho'(t) = g(\rho(t)) \\ \rho(t_0) = \rho_0. \end{cases}$$

Supongamos que  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface

$$\|x'(t)\| \leq g(\|x(t)\|), \quad \|x(t_0)\| \leq \rho_0.$$

Entonces se tiene

$$\|x(t)\| \leq \rho(t)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

Indicación: usar la desigualdad de Gronwall con  $\psi(t) = |x(t)| - \rho(t)$ .

**Problema 3.12.** Probar que si  $\|f(x)\| \leq g(\|x\|)$  y las soluciones de la ecuación diferencial  $\rho' = g(\rho)$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ , entonces las soluciones de  $x' = f(x)$  también están definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

**Problema 3.13.** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas,  $\alpha(t) \geq 0$  para todo  $t \in (a, b)$ ,  $\beta(u) > 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $\int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{\beta} = \infty$ . Probar que el PVI  $u'(t) = \alpha(t)\beta(u)$ ,  $u(t_0) = u_0$  tiene solución única y es prolongable hasta  $b$ .

**Problema 3.14.** Sea  $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y localmente Lipschitz en  $x$  uniformemente respecto de  $t$ , y supongamos que

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\beta(\|x\|),$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son como en el problema anterior. Probar que las soluciones de  $x'(t) = f(t, x(t))$  son prolongables hasta  $b$ .

**Problema 3.15.** Probar que si  $\phi(t, x_1)$  y  $\phi(t, x_2)$  son soluciones maximales de  $x' = f(x)$  (donde  $f$  es localmente Lipschitz) entonces sus trayectorias  $\{\phi(t, x_1) : t \in I_{x_1}\}$  y  $\{\phi(t, x_2) : t \in I_{x_2}\}$  o bien coinciden o bien son disjuntas.

**Problema 3.16.** Dar un ejemplo que muestre que el intervalo de definición  $[-\alpha, \alpha]$  de una solución  $x$  de (3.2) que proporciona el teorema de Peano no es óptimo: puede ocurrir que exista una solución  $\tilde{x}$  de (#) definida en un intervalo mayor.

**Problema 3.17.** Dar un ejemplo que muestre que el intervalo  $I_{x_0}$  depende fuertemente del dominio  $U$  de definición de  $f$  que se esté considerando.

**Problema 3.18.** Supongamos que existen constantes  $A, B$  tales que

$$\|f(x)\| \leq A + B\|x\|$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Probar que entonces todas las soluciones maximales de  $x'(t) = f(x(t))$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

Probar que este resultado es falso si la hipótesis de acotación se cambia por  $\|f(x)\| \leq A + B\|x\|^\alpha$ , con  $\alpha > 1$ .

**Problema 3.19.** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones continuas  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente acotada, y para cada  $n \in \mathbb{N}$  definamos

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Probar que  $(F_n)$  tiene una subsucesión que converge uniformemente.

**Problema 3.20.** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y acotada, y sea  $(x_k) : [0, T] \rightarrow U$  una sucesión de soluciones de  $x'(t) = f(x(t))$ . Supongamos que  $x_k(0)$  converge. Demostrar que existe una subsucesión  $(x_{k_j})$  de  $(x_k)$  que converge a una solución de  $x'(t) = f(x(t))$ .

**Problema 3.21.** Usar el problema anterior para deducir un resultado de continuidad de las soluciones de  $x' = f(x)$  respecto de las condiciones iniciales.

**Problema 3.22.** Denotemos por  $C^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  el conjunto de todas las funciones  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que son diferenciables y tales que  $\nabla\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de Lipschitz. Definamos

$$\rho_{1,1}(\varphi) = \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n, x \neq y} \frac{|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|}{|x - y|} = \text{Lip}(\nabla\varphi),$$

y

$$\|\varphi\|_{C^{1,1}(\mathbb{R}^n)} := |\varphi(x_0)| + |\nabla\varphi(x_0)| + \rho_{1,1}(\varphi),$$

donde  $x_0$  es un punto fijado de  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar que  $(C^{1,1}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^{1,1}(\mathbb{R}^n)})$  es un espacio de Banach.

**Problema 3.23.** Continuando con el problema anterior, usar las ideas de la demostración del teorema de Arzelà-Ascoli para probar que si  $\mathcal{A}$  es un subconjunto acotado del espacio  $E := (C^{1,1}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^{1,1}(\mathbb{R}^n)})$  entonces para toda sucesión  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  existe una subsucesión  $(\varphi_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  de  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente en cada acotado de  $\mathbb{R}^n$  a una función  $\varphi \in E$ , y tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \nabla \varphi_{k_j}(x) = \nabla \varphi(x)$  uniformemente en cada acotado de  $\mathbb{R}^n$ .

**Problema 3.24.** Generalizar los dos problemas anteriores para  $C^{m,1}(\mathbb{R}^n)$ , el espacio de las funciones de clase  $C^m$  cuyas derivadas parciales de orden  $m$  son de Lipschitz.

**Problema 3.25.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $f(t, x)$  localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de la variable  $t$ . Demostrar que, para cualquier compacto  $K \subset \Omega$  existe  $L > 0$  tal que la restricción de  $f$  a  $K$  es  $L$ -Lipschitz en la segunda variable, uniformemente respecto de la primera.

**Problema 3.26.** Sean  $K$  un espacio métrico compacto, e  $Y$  un espacio métrico completo. Demostrar que si  $\mathcal{B} \subset C(K, Y)$  es una familia equicontinua de funciones, entonces su adherencia  $\overline{\mathcal{B}}$  en  $C(K, Y)$  también es equicontinua.

**Problema 3.27.** Sean  $K$  un espacio métrico compacto. Demostrar que si  $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{R}^n)$  es una familia equicontinua de funciones que está puntualmente acotada, entonces su adherencia  $\overline{\mathcal{B}}$  en  $C(K, \mathbb{R}^n)$  es una familia puntualmente compacta.

**Problema 3.28.** Consideremos la ecuación del péndulo

$$\theta'' + \text{sen } \theta = 0.$$

Probar que todas las soluciones maximales  $\theta(t)$  de esta ecuación están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Problema 3.29.** Probar que las soluciones maximales de  $z' = \text{sen}(2z)$  están definidas en  $\mathbb{R}$  y satisfacen  $\|\Phi(t, x) - \Phi(t, y)\| \leq \|x - y\| e^{2|t|}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Deducir que si  $x_n \rightarrow x$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t, x_n) = \Phi(t, x)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ¿Se tiene convergencia uniforme en  $\mathbb{R}$ ?

**Problema 3.30.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de Lipschitz y tal que  $f(0) = f(1) = 0$ . Consideremos la ecuación  $x' = f(x)$ . Probar que las soluciones que comienzan en  $[0, 1]$  nunca abandonan este intervalo. Hallar el intervalo maximal de definición  $(\tau_-, \tau_+)$  de las soluciones  $x(t)$  que comienzan en algún punto de  $[0, 1]$ . Determinar si existe  $\lim_{t \rightarrow \tau_+} x(t)$ .

**Problema 3.31.** Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, localmente Lipschitz en la segunda variable uniformemente en la primera, y periódica de período  $T$  en la primera variable (es decir,  $f(t + T, x) = f(t, x)$  para todo  $t$  y todo  $x$ ). Consideremos la ecuación diferencial periódica

$$x'(t) = f(t, x(t)). \quad (3.7)$$

1. Probar que  $x$  es solución de esta ecuación si y sólo si  $x(t + T)$  es solución.
2. Demostrar que una solución  $x(t)$  es  $T$ -periódica si y sólo si  $x(T) = x(0)$ .
3. Demostrar que, si  $x_0$  es tal que  $\Phi(T, x_0) = x_0$ , entonces la solución  $\Phi(t, x_0)$  es  $T$ -periódica. Por tanto las soluciones periódicas de (3.7) se corresponden con los puntos fijos del *operador período*  $x \mapsto \Phi(T, x)$ .
4. Sea  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua de período  $T$ . Probar que la ecuación  $x' = ax + b(t)$  tiene una única solución  $T$ -periódica si  $a \neq 0$ , y que puede no tener ninguna o infinitas si  $a = 0$ .
5. Obtener las soluciones periódicas de  $x' = ax + \text{sen } t$ .

**Problema 3.32.** Consideremos la ecuación  $x' = ax - \varepsilon x^2 + 2 + \text{sen } t$ , donde  $a > 0$ .

1. Probar que existe una única solución periódica para  $\varepsilon = 0$ ,
2. Obtener  $\partial \Phi(2\pi, x, \varepsilon) / \partial x$  para  $\varepsilon = 0$  y probar, mediante el teorema de la función implícita, que la ecuación admite una solución periódica para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño.

## Capítulo 4

# Repaso de la teoría de ecuaciones lineales

En este capítulo hacemos un breve repaso de la teoría de ecuaciones lineales con coeficientes constantes, que el alumno debe ya conocer por la asignatura de ecuaciones diferenciales de segundo del grado.

### 4.1. Normas y convergencia en el espacio de operadores lineales (o de matrices).

El conjunto  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$  de los operadores lineales  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  (donde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) y, equivalentemente (una vez fijada una base en  $\mathbb{K}^n$ ), el conjunto  $\mathcal{M}_n$  de las matrices  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{K}$  forman un espacio vectorial de dimensión  $n^2$  sobre  $\mathbb{K}$ . En este espacio, naturalmente isomorfo a  $\mathbb{K}^{n^2}$ , consideraremos la norma

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{\alpha : \|Ax\| \leq \alpha\|x\| \forall x\}.$$

Puesto que todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, se tiene que dicho espacio es un espacio de Banach, y además una sucesión  $A_k = (a_{ij}^k)$  de matrices converge a una matriz  $A = (a_{ij})$  en este espacio si y sólo si  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k = a_{ij}$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

A su vez esto equivale a la convergencia puntual; ver el problema 4.2.

### 4.2. Sistemas lineales autónomos. Exponencial de una matriz.

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ .

Usando los resultados del Capítulo 2 es inmediato ver que este PVI tiene solución única definida en todo  $\mathbb{R}$ . De hecho, usando el método de las aproximaciones sucesivas de Picard se comprueba que su única solución viene dada por

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_0.$$

También puede usarse el método de las poligonales de Euler visto en el Capítulo 3 para probar que esta solución también es igual a

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{I} + \frac{t}{N} A \right)^N x_0.$$

En particular se obtiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{I} + \frac{1}{N} A \right)^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

para todo  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ , lo que generaliza el conocido caso particular en que  $A$  es un número real.

**Definición 4.1.** Se define la exponencial de  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$  como

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Usando que  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  es inmediato ver que esta serie converge, y que  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ , para todo  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ .

Como consecuencia de las observaciones precedentes deducimos lo siguiente.

**Teorema 4.1. Teorema.** *La única solución de la ecuación autónoma lineal (4.1) viene dada por*

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

Algunas propiedades de la exponencial de un operador lineal se estudian en los problemas 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, y 4.13.

**Definición 4.2.** Se dice que  $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de transformaciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  si:

1. la aplicación  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow g^t(x) \in \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$ ;
2. para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $g^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo con inversa  $(g^t)^{-1} = g^{-t}$ ;
3.  $g^{s+t} = g^s \circ g^t$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ , y
4. en particular  $g^0 = \mathbb{I}$ .

Se dice que  $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de transformaciones lineales si además  $g^t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.2.**  $\{g^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de transformaciones lineales si y sólo si existe  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tal que  $g^t = e^{tA}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ): es consecuencia de los problemas 4.9, 4.11, 4.12, y 4.13.

( $\Rightarrow$ ): basta poner  $A = \frac{d}{dt} g^t|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g^t - \mathbb{I})$  y comprobar que  $g^t = e^{tA}$ . □

Calcular la exponencial de una matriz puede resultar bastante difícil si se intenta hacer directamente. La siguiente observación, combinada con el teorema de Jordan, hace que la tarea sea fácil, si bien algo pesada.

**Observación 4.3.** Sean  $A, B, P \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$  con  $\det P \neq 0$ , y supongamos que  $A = P^{-1}BP$ . Entonces

$$\exp A = P^{-1} \exp(B) P.$$

**Teorema 4.4** (forma canónica de Jordan). *Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  entonces existe un cambio lineal de coordenadas  $P$  tal que*

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

donde cada bloque  $J_k$  es una matriz  $n(k) \times n(k)$  bien diagonal o bien de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_k & & & & \\ 1 & \alpha_k & & & \\ & 1 & \alpha_k & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha_k \end{pmatrix}$$

siendo  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  los autovalores de  $A$  (posiblemente repetidos).

En consecuencia,  $A$  puede escribirse de manera única en la forma

$$A = D + N,$$

donde  $D$  es una matriz diagonalizable y  $N$  es nilpotente (es decir  $N^\nu = 0$  para algún  $\nu \leq n$ ), y  $DN = ND$ . Además, un cambio de coordenadas lineal  $Q$  tal que

$Q^{-1}DQ$  es igual a la matriz diagonal formada por los autovalores de  $A$

viene dado por la matriz  $Q$  cuyas columnas son los vectores de  $\mathbb{R}^n$  obtenidos al reunir bases de los autoespacios generalizados correspondientes a los autovalores de  $A$ , expresados respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Por otra parte, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , entonces  $A$  puede escribirse de manera única en la forma

$$A = C + N,$$

siendo  $N$  nilpotente y  $C$  una matriz que conmuta con  $N$  y es semejante a otra de la forma

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_k & \\ & & & & C_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & C_\ell \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son los autovalores reales de  $A$  y

$$C_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$$

son submatrices formadas por los autovalores complejos de  $A$  que tienen partes imaginarias positivas, es decir  $a_j + ib_j$  con  $b_j > 0$  (recuérdese que si  $A$  es real entonces el conjugado de cualquier autovalor complejo de  $A$  es otro autovalor complejo de  $A$ ). Además, un cambio de coordenadas lineal  $Q$  tal que

$Q^{-1}CQ$  es igual a la matriz  $\tilde{C}$

viene dado por la matriz  $Q$  cuyas columnas son los vectores de  $\mathbb{R}^n$  obtenidos al reunir las partes reales e imaginarias de las bases de los autoespacios generalizados correspondientes a los autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, a_1 + ib_1, \dots, a_\ell + ib_\ell$ , expresados respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Usando el teorema de Jordan podemos encontrar una base de  $\mathbb{K}^n$  tal que la matriz de  $A$  respecto de esta base, digamos  $B = PAP^{-1}$ , es la más simple posible; entonces calcular  $\exp B$  es fácil, y por consiguiente calcular  $\exp A = P^{-1} \exp(B)P$  también lo es.

Más fácil aún resulta usar la descomposición  $A = C + N$  del teorema anterior para deducir (recordando que  $C$  y  $N$  conmutan) que

$$e^{tA} = e^{tC} e^{tN} = Q^{-1} e^{t\tilde{C}} Q e^{tN}.$$

Se sigue de esta igualdad que cuando  $A = C$  es diagonalizable con autovalores reales las soluciones de  $x'(t) = Ax(t)$  son combinaciones lineales de funciones de la forma  $t \mapsto e^{t\lambda_i} v_i$ , donde  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  son los autovalores de  $A$  y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ . Si  $A = C$  es diagonalizable pero con autovalores complejos, es decir,  $A$  es semejante a una matriz del tipo  $\tilde{C}$ , entonces puesto que las entradas de la matriz  $e^{t\tilde{C}}$  son combinaciones lineales de las funciones  $e^{t\lambda_j}$ ,  $e^{a_j t} \cos(tb_j)$  y  $e^{a_j t} \operatorname{sen}(tb_j)$ , se deduce que las coordenadas  $x_j(t)$  de las soluciones de  $x' = Ax$  son también combinaciones lineales de estas funciones. Por otro lado es inmediato que las entradas de la matriz  $e^{tN}$  son polinomios en  $t$  de grado menor o igual que  $n - 1$ , y por consiguiente en el caso general las funciones coordenadas  $x_j(t)$  de las soluciones de  $x' = Ax$  son combinaciones lineales de funciones de los tipos  $p_j(t)e^{t\lambda_j}$ ,  $q_j(t)e^{a_j t} \cos(tb_j)$  y  $r_j(t)e^{a_j t} \operatorname{sen}(tb_j)$ , donde  $p_j, q_j, r_j$  son polinomios de grado menor o igual que  $n - 1$ .

El siguiente resultado resume estas observaciones.

**Teorema 4.5.** *Sea  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un operador lineal con autovalores reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  de multiplicidades respectivas  $\nu_1, \dots, \nu_k$ , y autovalores complejos (conjugados a pares)  $\alpha_\ell \pm i\beta_\ell$  con multiplicidades  $\mu_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ . Entonces toda solución  $x$  de la ecuación  $x'(t) = Ax(t)$  se puede escribir en la forma  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  con*

$$x_j(t) = \sum_{\ell=1}^k e^{t\lambda_\ell} p_{j,\ell}(t) + \sum_{\ell=1}^m e^{\alpha_\ell t} (q_{j,\ell}(t) \cos \beta_\ell t + r_{j,\ell}(t) \operatorname{sen} \beta_\ell t),$$

donde  $p_{j,\ell}, q_{j,\ell}$  y  $r_{j,\ell}$  son polinomios (con coeficientes reales) de grados menores que  $\nu_\ell, \mu_\ell$  y  $\mu_\ell$  respectivamente.

Así pues muchas veces, para encontrar la solución de un PVI lineal concreto, en lugar de llevar hasta el final el cálculo de la forma de Jordan  $J$  y de  $\exp J$ , resulta más sencillo usar el teorema anterior y los datos iniciales para, habiendo calculado los autovalores de  $A$ , averiguar los coeficientes de los polinomios  $p_{j,\ell}, q_{j,\ell}, r_{j,\ell}$  mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Sin embargo, cuando necesitamos saber el comportamiento de *todas* las soluciones de la ecuación  $x'(t) = Ax(t)$ , por ejemplo para estudiar con mucha precisión el diagrama de fases de esta ecuación, entonces en general (y en especial cuando hay autovalores repetidos) sí es necesario calcular la forma de Jordan de  $A$  y la matriz  $P$  de cambio de base. Se recomienda consultar por ejemplo los libros [4] o [7] si se necesita refrescar estas cuestiones.

### 4.3. Un teorema de Liouville

Recordemos la definición de flujo de una ecuación diferencial  $y'(t) = f(y(t))$  vista en el Capítulo 2: para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  se considera el PVI

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x, \end{cases}$$

cuya solución se denota  $\phi(t, x)$ . Si  $f(x) = Ax$ , donde  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , sabemos que en este caso

$$\phi(t, x) = e^{tA} x$$

está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto, para cada  $t \in \mathbb{R}$  podemos considerar la aplicación  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\phi_t(x) := \phi(t, x).$$



A veces resulta útil saber cómo cambia el volumen de una figura al aplicarle el flujo  $\phi_t$  de una ecuación lineal, es decir, qué relación hay entre  $\text{vol}(E)$  y  $\text{vol}(\phi_t(E))$  si  $E$  es un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^n$ , y en qué condiciones dicho volumen se preservará. El siguiente teorema de Liouville responde a estas cuestiones.

**Teorema 4.6** (Liouville). *El flujo  $\{e^{tA} : t \in \mathbb{R}\}$  de la ecuación  $x'(t) = Ax(t)$  en cada tiempo  $t$  cambia el volumen de una figura por un factor de  $e^{at}$ , con  $a = \text{tr}(A)$ , y además preserva la orientación de la figura.*

Es decir, si  $E$  es cualquier conjunto medible de  $\mathbb{R}^n$  entonces

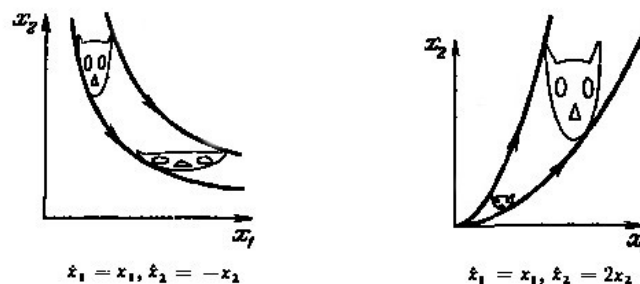
$$\text{vol}(e^{tA}(E)) = e^{\text{tr}(At)} \text{vol}(E),$$

donde  $\text{vol}$  denota la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ , y además si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es cualquier base de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\{Dg^t(y)(e_i) : 1 \leq i \leq n\}$  es otra base con la misma orientación, para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$\text{vol}(e^{tA}(E)) = \int_{e^{tA}(E)} dy = \int_E |\det e^{tA}| dx = \int_E e^{\text{tr}(At)} dx = e^{\text{tr}(At)} \int_E 1 dx = e^{\text{tr}(At)} \text{vol}(E),$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el teorema del cambio de variable y en la tercera el problema 4.13. La afirmación sobre la orientación se sigue del hecho de que  $\det e^{tA} = e^{\text{tr}(At)} > 0$ .  $\square$



**Corolario 4.7.** *Si la traza de  $A$  es cero, entonces el flujo  $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}\}$  de la ecuación  $x'(t) = Ax(t)$  preserva los volúmenes de las figuras.*

### 4.4. Sistemas lineales con coeficientes no constantes

Ahora recordaremos la teoría de sistemas lineales de la forma

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{4.2}$$

donde  $I \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo abierto y  $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$  es continua. De los teoremas de existencia y unicidad y prolongación vistos en los Capítulos 2 y 3 se sigue inmediatamente que para cada  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^n$  existe una única solución de (4.2) que satisface la condición inicial  $x(t_0) = x_0$  y está definida para todo  $t \in I$ . Más aún, la linealidad en  $x$  de la ecuación implica que cualquier combinación lineal de soluciones de (4.2) es una solución de (4.2). Por tanto, si  $\xi_j(t)$  denota la única solución del PVI

$$\begin{cases} x'(t) = A(t) \\ x(t_0) = e_j, \end{cases} \tag{4.3}$$

donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  denota la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , dado cualquier vector  $x_0 = \sum_{j=1}^n x_0^j e_j$ , la función

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^n x_0^j \xi_j(t)$$

es solución de (4.2) y satisface la condición inicial  $\xi(t_0) = x_0$ , luego por la unicidad de las soluciones, es la única solución del PVI

$$\begin{cases} x'(t) = A(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

En particular este argumento prueba que el conjunto de las soluciones de (4.2) forma un espacio vectorial de dimensión  $n$ , y nos da una manera de hallar cualquier solución de (4.4) siempre que conozcamos las *soluciones fundamentales* de (4.2), esto es, las soluciones de los PVI (4.3) para  $j = 1, \dots, n$ . Si denotamos

$$X(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$$

e interpretamos este vector como una matriz del espacio  $\mathcal{M}_n$  de las matrices  $n \times n$  cuyas columnas son los vectores  $\xi_j(t)$ , vemos que la solución de (4.4) viene dada por

$$\xi(t) = X(t)x_0.$$

A su vez, la matriz  $X(t)$ , a la que vamos a llamar *matriz solución principal*, es la única solución del PVI matricial<sup>1</sup>

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) \\ Y(t_0) = \mathbb{I}, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde  $\mathbb{I}$  denota la identidad. Por supuesto, en el caso más simple en que  $A(t) \equiv A$  es constante, se tiene que  $X(t) = e^{(t-t_0)A}$ . Sin embargo, en general es falso que  $X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)$ ; esto sólo ocurre cuando  $A(s)$  y  $A(t)$  conmutan para todo  $s, t$ . Para hacer más patente la dependencia de esta solución del instante inicial  $t_0$ , escribiremos en lo que sigue

$$X(t; t_0) = X(t)$$

para denotar la única solución de (4.5). Nótese que

$$X(t; t_1)X(t_1; t_0) = X(t; t_0),$$

ya que, como se comprueba inmediatamente, ambas funciones son solución de la ecuación matricial  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ , y ambas satisfacen la condición inicial  $Y(t_1) = X(t_1; t_0)$ . En particular, poniendo  $t = t_0$  y usando que  $X(t_0; t_0) = \mathbb{I}$ , se ve que  $X(t_1; t_0)$  es un isomorfismo lineal con inversa

$$X(t_1; t_0)^{-1} = X(t_0; t_1),$$

para cada  $t_0, t_1 \in I$ .

Al determinante de  $X(t; t_0)$  se le llama *Wronskiano*, y satisface la siguiente propiedad.

**Lema 4.8** (Fórmula de Liouville). *El determinante  $W(t) = \det X(t; t_0)$  de la única solución de (4.5) coincide con la única solución de la ecuación diferencial de variables separadas*

$$W'(t) = \text{tr}(A(t))W(t)$$

<sup>1</sup>La teoría vista para ecuaciones diferenciales del tipo  $x'(t) = f(t, x(t))$ , con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , se extiende inmediatamente a ecuaciones del tipo  $X'(t) = F(t, X(t))$ , donde  $X(t)$  toma valores en el espacio  $\mathcal{M}_n$  de las matrices reales  $n \times n$ , que es isomorfo al espacio  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Las operaciones de cálculo matricial son válidas siempre que se tenga en cuenta la posible no conmutatividad de los productos: por ejemplo, es cierto que  $\frac{d}{dt} A(t)B(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$ , y también que  $\frac{d}{dt} A(t)^{-1} = -A(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}$ , pero estos los productos en general no pueden reordenarse.

con condición inicial  $W(t_0) = 1$ . Por tanto

$$W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds\right)$$

para cada  $t \in I$ .

*Demostración.* Por ser  $X(t; t_0)$  solución de (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} X(t + \varepsilon; t) &= X(t; t) + X'(t; t)\varepsilon + o(\varepsilon) = \mathbb{I} + A(t)\mathbb{I}\varepsilon + o(\varepsilon) = \\ &= \mathbb{I} + A(t)\varepsilon + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Si consideramos la función determinante como un polinomio  $n$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^{n^2}$  al identificar el espacio de las matrices reales  $n \times n$  con  $\mathbb{R}^{n^2}$ , es fácil ver que

$$\det(\mathbb{I} + \varepsilon A(t) + o(\varepsilon)) = \det(\mathbb{I} + \varepsilon A(t)) + o(\varepsilon) = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j(t)\varepsilon) + o(\varepsilon) = 1 + \text{tr}(A(t))\varepsilon + o(\varepsilon),$$

donde  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  son los autovalores de  $A(t)$ . Por tanto

$$\det X(t + \varepsilon; t) = 1 + \text{tr}(A(t))\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Recordando que  $X(t + \varepsilon; t_0) = X(t + \varepsilon; t)X(t; t_0)$  esto implica que

$$\begin{aligned} W(t + \varepsilon) &= \det X(t + \varepsilon; t_0) = \det X(t + \varepsilon; t) \det X(t; t_0) = \\ &= (1 + \text{tr}(A(t))\varepsilon + o(\varepsilon)) W(t), \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\frac{d}{dt}W(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W(t + \varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\text{tr}(A(t))\varepsilon + o(\varepsilon)) W(t)}{\varepsilon} = \text{tr}(A(t))W(t),$$

es decir,

$$W'(t) = \text{tr}(A(t))W(t),$$

una ecuación de variables separadas cuya única solución para la condición inicial  $W(0) = 1$  viene dada por  $W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds\right)$ .  $\square$

En el siguiente capítulo veremos cómo el lema anterior permite probar una generalización del Teorema 4.6 para sistemas no lineales.

Concluimos este capítulo recordando un método para resolver la ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes no constantes

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{4.6}$$

donde  $A : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas. La clave está en observar que la diferencia de dos soluciones de esta ecuación es solución de (4.2). Entonces bastará con encontrar una solución particular de (4.6): la suma de esta solución particular con las soluciones de (4.2) generará el espacio de todas las posibles soluciones de (4.6). Para encontrar una solución particular de (4.6) nos inspiramos en el método de *variación de las constantes*, bien conocido en el caso unidimensional, para conjeturar que dicha solución tendrá la forma

$$x(t) = X(t; t_0)k(t).$$

Entonces deduciríamos que

$$A(t)x(t) + b(t) = x'(t) = A(t)x(t) + X(t; t_0)k'(t),$$

luego

$$k'(t) = X(t; t_0)^{-1}b(t) = X(t_0; t)b(t),$$

que al integrar nos da

$$k(t) = k_0 + \int_{t_0}^t X(t_0; s)b(s)ds.$$

Combinando todas las observaciones anteriores vemos que la solución de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

viene dada por

$$x(t) = X(t; t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)b(s)ds,$$

donde como siempre  $X(t; t_0)$  denota la única solución de (4.5).

## 4.5. Problemas

**Problema 4.1.** Probar que

$$\sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{\alpha : \|Ax\| \leq \alpha\|x\| \forall x\},$$

y que cualquiera de estas expresiones efectivamente define una norma en  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ .

**Problema 4.2.** Sea  $(A_k)$  una sucesión en  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ , y  $A$  un operador lineal de este mismo espacio. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\| = 0$ .
2. Para cada subconjunto acotado  $B$  de  $\mathbb{K}^n$  se tiene que  $A_k x$  converge a  $Ax$  uniformemente en  $x \in B$ .
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k x = Ax$  para cada  $x \in \mathbb{K}^n$ .

**Problema 4.3.** Probar que:

1.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .
2.  $\|A^j\| \leq \|A\|^j$ .

**Problema 4.4.** Probar que si  $A_k \rightarrow A$  y  $B_k \rightarrow B$  entonces  $A_k B_k \rightarrow AB$ .

**Problema 4.5.** Supongamos que  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| < +\infty$ . Probar que la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  converge en el espacio  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ .

**Problema 4.6.** Probar que (4.1) tiene una única solución  $x(t)$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Problema 4.7.** Usar el método de las aproximaciones sucesivas de Picard para probar que la única solución  $x(t)$  de (4.1) viene dada por

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_0.$$

**Problema 4.8.** Usar el método de Euler para probar que la única solución  $x(t)$  de (4.1) viene dada por

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{I} + \frac{t}{N} A \right)^N x_0.$$

Deducir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{I} + \frac{1}{N} A \right)^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

para todo  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ .

**Problema 4.9.** Probar que si  $A$  y  $B$  conmutan (es decir  $[A, B] := AB - BA = 0$ ) entonces

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

**Problema 4.10.** Dar un ejemplo de que el resultado del problema anterior no es cierto en general si  $[A, B] \neq 0$ .

**Problema 4.11.** Probar que  $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$  y que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

**Problema 4.12.** Probar que  $\det(e^A) \neq 0$  para todo  $A$ .

**Problema 4.13.** Probar que  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$  para toda  $A \in \mathcal{M}_n$ .

**Problema 4.14.** Sean  $A, B, P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  con  $\det P \neq 0$ , y supongamos que  $B = P^{-1}AP$ . Probar que

$$\exp B = P^{-1} \exp(A)P.$$

**Problema 4.15.** Probar que el conjunto de todas las soluciones de  $x'(t) = Ax(t)$  forma un subespacio vectorial de dimensión finita igual a  $n$  del espacio vectorial (infinito dimensional)  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ .

**Problema 4.16.** Probar que  $u$  es autovector (con autovalor  $\alpha$ ) de  $A$  si y sólo si  $u$  es autovector (con autovalor  $e^\alpha$ ) de  $\exp(A)$ , y que las multiplicidades algebraica y geométrica de  $\alpha$  son las mismas que las de  $e^\alpha$ .

**Problema 4.17.** Calcular  $e^{tA}$  cuando  $A$  es diagonal, y deducir que en este caso las soluciones de  $x'(t) = Ax(t)$  son combinaciones lineales de funciones de la forma  $t \mapsto e^{t\lambda_i}v_i$ , donde  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  son los autovalores de  $A$  y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ .

**Problema 4.18.** Suponiendo que  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es diagonalizable (con autovalores reales), dibujar el diagrama de fases de la ecuación  $x'(t) = Ax(t)$  dependiendo de las posibles combinaciones de signos de los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$ .

**Problema 4.19.** Supongamos ahora que  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  no es diagonalizable con autovalores reales porque hay dos autovalores complejos  $\lambda, \bar{\lambda}$  (con  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ ). Entonces existen  $u, v \in \mathbb{R}^2$  tales que  $A(u + iv) = \lambda(u + iv)$ ,  $A(u - iv) = \bar{\lambda}(u - iv)$ , es decir  $Au = \alpha u - \beta v$ ,  $Av = \beta u + \alpha v$ , donde  $\alpha = \text{Re}(\lambda)$ ,  $\beta = \text{Im}(\lambda)$ .

Probar que  $\{u, v\}$  forman una base de  $\mathbb{R}^2$ , que  $t \mapsto e^{\lambda t}(u + iv)$  es solución de  $z'(t) = Az(t)$  en  $\mathbb{C}^2$ , y tomar partes reales e imaginarias para deducir que

$$t \mapsto e^{t\alpha}(\cos(t\beta)u - \text{sen}(t\beta)v), \quad \text{y} \quad t \mapsto e^{t\alpha}(\cos(t\beta)v + \text{sen}(t\beta)u)$$

son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación  $x'(t) = Ax(t)$ .

Deducir que toda solución es combinación lineal de estas dos, y dibujar el diagrama de fases correspondiente, dependiendo de las posibles combinaciones de signos de  $\alpha, \beta$ .

**Problema 4.20.** Supongamos que  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  no es diagonalizable pero tiene un autovalor real  $\lambda$  de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1, es decir, su forma canónica de Jordan es

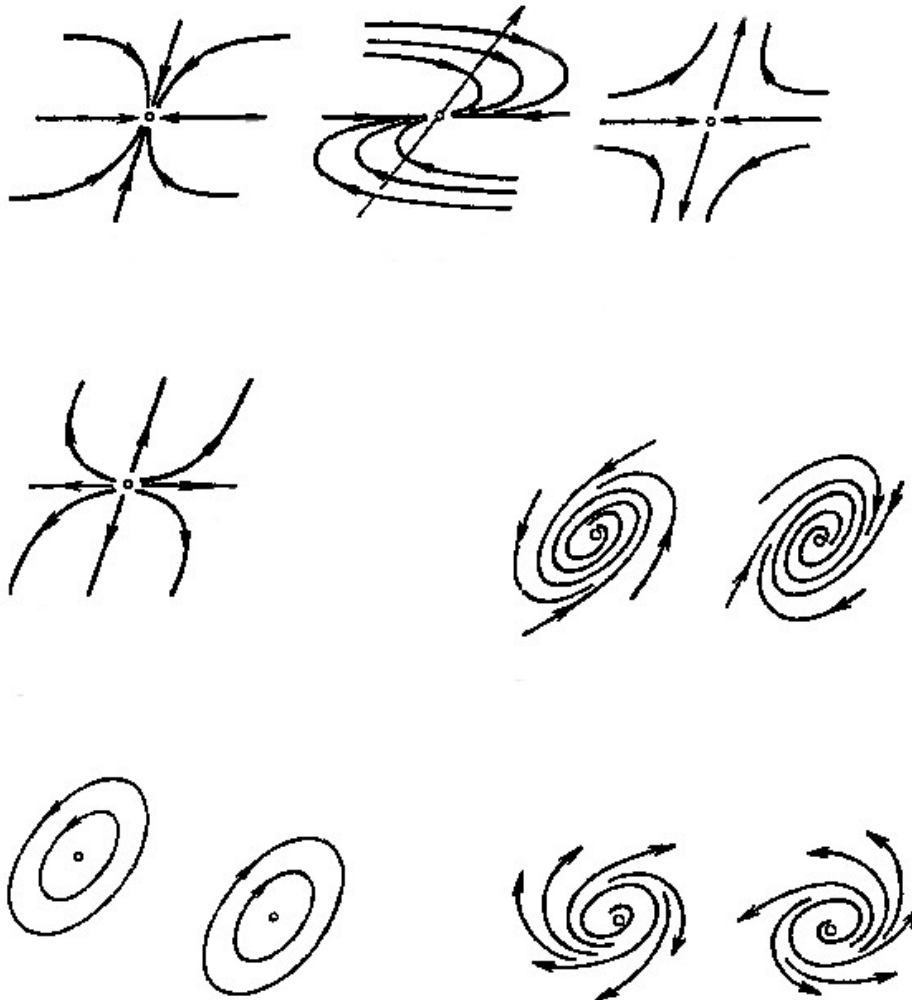
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y se tiene  $J = B^{-1}AB$ , donde  $B$  es una matriz formada por dos vectores  $\{u, v\}$  donde  $Au = \lambda u$  y  $(A - \lambda I)v = u$ . Probar que en este caso

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Deducir que todas las soluciones de  $x'(t) = Ax(t)$  son combinaciones lineales de funciones de la forma  $t \mapsto e^{\lambda t}u$  y  $t \mapsto (r + t)e^{\lambda t}v$ , y dibujar el diagrama de fases de esta ecuación.

**Problema 4.21.** Los siguientes dibujos corresponden a diagramas de fases de sistemas lineales  $x' = Ax$ , donde  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . En cada caso, decir cómo deben ser los autovalores de  $A$ , y poner ejemplos de sistemas que tengan un comportamiento similar.



**Problema 4.22.** Calcular  $\exp(J)$ , donde  $J = \alpha\mathbb{I} + N$  es uno de los bloques que aparecen en el teorema de Jordan.

**Problema 4.23.** Sea  $A$  una matriz  $3 \times 3$  real con un sólo autovalor real  $\lambda$  de multiplicidad 3. Probar que

$$e^{tA} = e^{t\lambda} \left( \mathbb{I} + tQ + \frac{1}{2}t^2Q^2 \right),$$

donde  $Q = A - \lambda\mathbb{I}$ . Generalizarlo a matrices  $k \times k$ .

**Problema 4.24.** Calcular  $e^{tA}$  para las siguientes matrices  $A$ :

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3.  $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

y representar gráficamente los diagramas de fases resultantes.

**Problema 4.25.** Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_2 + 2x_3 \\ x'_3 = 2x_3 \end{cases}$$

con  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  y  $x_3(0) = 1$ .

**Problema 4.26.** Consideremos el sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ , donde  $A : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  es continua. Comprobar que para cada  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  existe una única solución de (4.2) que satisface la condición inicial  $x(t_0) = x_0$  y está definida para todo  $t \in I$ .

**Problema 4.27.** Probar que si  $z(t)$  es una solución de  $x'(t) = A(t)x(t)$ , donde  $A : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  es continua, y  $z(t_0) = 0$  para algún  $t_0 \in I$ , entonces  $z(t) = 0$  para todo  $t \in I$ .

**Problema 4.28** (Transformada de Laplace). Sea  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$  una función continua tal que existen constantes  $M \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $\|x(t)\| \leq Me^{at}$  para todo  $t \geq 0$ . Se define la *transformada de Laplace* de  $x$  por

$$\mathcal{L}(x)(z) = \int_0^\infty e^{-zt}x(t)dt.$$

Comprobar que:

1.  $\mathcal{L}(x)(z)$  está bien definida, es lineal en la variable  $x$ , y analítica en la variable  $z$  en  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$ .
2. Suponiendo además que  $x \in C^1([0, \infty), \mathbb{C}^n)$  y  $\|x(t)\| + \|x'(t)\| \leq Me^{at}$  para todo  $t \geq 0$ , demostrar que, para  $\operatorname{Re} z > a$ ,

$$\mathcal{L}(x')(z) = z\mathcal{L}(x)(z) - x(0).$$

3. Si  $f \in C([0, \infty), \mathbb{C}^n)$  cumple  $\|f(t)\| \leq Me^{at}$  para todo  $t \geq 0$ , demostrar que el PVI lineal no homogéneo  $x' = Ax + f(t)$ ,  $x(0) = x_0$  se convierte, por acción de la transformada de Laplace, en un sistema lineal homogéneo





## Capítulo 5

# El flujo de un sistema autónomo. Órbitas y diagramas de fases.

En todo lo que sigue vamos a centrarnos en el estudio de ecuaciones diferenciales autónomas

$$x'(t) = f(x(t)),$$

donde  $f$  es un campo vectorial localmente Lipschitz definido en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y en las propiedades del flujo asociado a esta ecuación.

### 5.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un semigrupo  $(G, +)$  que actúa sobre un espacio  $M$ , es decir, existe una aplicación

$$\psi : G \times M \rightarrow M, (g, x) \mapsto \psi_g(x)$$

tal que

$$\psi_g \circ \psi_h = \psi_{g+h}, \text{ y } \psi_0 = \mathbb{I},$$

donde  $\mathbb{I} : M \rightarrow M$  denota la aplicación identidad. El espacio  $M$  suele ser una variedad diferenciable (en este curso,  $M = \Omega$ , un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ). Si  $G$  es un grupo se habla de un sistema dinámico invertible. Cuando  $G = \mathbb{N}$  o  $G = \mathbb{Z}$  se dice que el sistema dinámico es discreto. Cuando  $G = \mathbb{R}^+$  o  $G = \mathbb{R}$  se dice que es un sistema dinámico continuo.

El ejemplo más básico de sistema dinámico discreto es el de la composición iterada consigo misma de una aplicación  $f$ : en este caso  $\psi_n = f \circ \dots \circ f$  ( $n$  veces).

El ejemplo más prototípico de sistema dinámico continuo es el del flujo de un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = x$$

(donde  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , siendo  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ), cuya única solución denotamos por  $\Phi(t, x)$ , y que estudiaremos a fondo en lo que sigue.

### 5.2. El flujo de un sistema autónomo. Propiedades

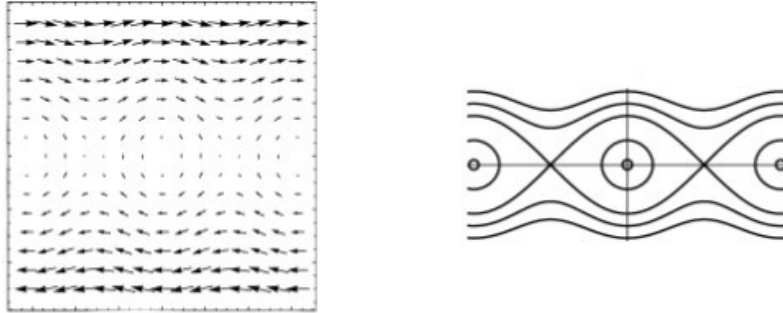
Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1$  (al menos).

Como ya hemos visto en el Capítulo 2, el teorema de existencia y diferenciabilidad local del flujo nos asegura que la aplicación

$$(t, x) \mapsto \Phi(t, x)$$

está bien definida y es de clase  $C^k$  en un entorno  $(-\delta, \delta) \times B(x_0, \delta)$  de cada punto  $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ , siempre que  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sea de clase  $C^k$ . En esta sección vamos a ver que el conjunto maximal de definición del flujo es un abierto donde el flujo es diferenciable, y estudiaremos también otras propiedades importantes del flujo.

El sistema  $x' = f(x)$  puede interpretarse como un campo vectorial de velocidades de curvas, y sus soluciones son curvas (llamadas *curvas integrales* de  $f$ ) que son tangentes a este campo vectorial en cada punto de sus trayectorias.



Sabemos también que dado  $x \in \Omega$  existe una única curva integral maximal de  $f$ ,  $t \mapsto \phi(t, x)$  que comienza en  $x$  (es decir  $\phi(0, x) = x$ ), y que está definida en un intervalo abierto  $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$  (por definición, el mayor intervalo que contiene a 0 sobre el que existe una curva integral de  $f$  que comience en  $x$ ).

**Definición 5.1.** En lo que sigue denotaremos

$$D = D(f) = \bigcup_{x \in \Omega} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times \Omega,$$

al que llamaremos dominio del flujo  $\Phi : D \rightarrow \Omega$ , que es la aplicación definida por  $(t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \phi(t, x)$ , donde  $t \mapsto \phi(t, x)$  es la curva integral maximal que comienza en  $x$ .

A veces (cuando nos interese fijar una de las dos variables y considerar la aplicación definida al hacer variar la otra) también denotaremos  $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ , y  $\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$

**Proposición 5.1.** Si  $\phi : I_x \rightarrow \Omega$  es una curva integral maximal de  $z' = f(z)$  que comienza en  $x$  entonces  $\phi(\cdot + s)$  es una curva integral que comienza en  $y = \phi(s)$ . Además  $I_y = -s + I_x$ . Por tanto para todo  $x \in \Omega$ ,  $s \in I_x$ , se tiene

$$\Phi(s + t, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$$

para todo  $t \in I_{\Phi(s, x)} = I_x - s$ .

*Demostración.* Se tiene que

$$\frac{d}{dt} \phi(t + s) = \phi'(t + s) = f(\phi(t + s)), \quad \phi(t + s)|_{t=0} = \phi(s) = y,$$

luego  $\phi(\cdot + s)$ , que está definida en  $-s + I_x$ , es solución de

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = y. \end{cases} \quad (5.1)$$

Luego la solución maximal de este problema está definida en un intervalo que contiene a  $-s + I_x$ . Es decir, tenemos que  $-s + I_x \subseteq I_y$ .

Por otro lado, si  $\xi : I_y \rightarrow \Omega$  es la solución maximal de (5.1), entonces  $\tilde{\phi}(t) := \xi(t - s)$ , que está definida en  $s + I_y$ , es solución de

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(s) = y. \end{cases} \quad (5.2)$$

Como  $\phi$  también es solución de este problema, se tiene que  $\phi = \tilde{\phi}$  en  $I_x \cap (s + I_y) = I_x$ . En particular  $\tilde{\phi}(0) = \phi(0) = x$ . Por tanto  $\tilde{\phi}$  es solución de

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = x, \end{cases} \quad (5.3)$$

luego su intervalo de definición,  $s + I_y$ , debe estar contenido en el intervalo maximal de definición de este problema,  $I_x$ . Es decir, que también se tiene  $I_y \subseteq -s + I_x$ . Hemos probado así, con la notación del flujo, que  $I_{\Phi(s,x)} = I_x - s$ , y que  $\Phi(s + t, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$  para todo  $t \in I_{\Phi(s,x)}$ .  $\square$

**Teorema 5.2.** *El dominio  $D(f)$  del flujo  $\Phi$  de  $f$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y la aplicación  $\phi : D(f) \rightarrow \Omega$  es de clase  $C^1$ . Más en general,  $\Phi$  es de clase  $C^k$  si  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ .*

*Demostración.* Sea  $(t_0, x_0) \in D(f)$ , y supongamos por ejemplo que  $t_0 \geq 0$ , entonces  $\Phi(t, x_0)$  está definido al menos en  $[0, t_0]$ , y por tanto también al menos en un intervalo algo mayor  $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Por el Teorema 3.22, existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in B(x_0, \delta)$  entonces  $\Phi(t, x)$  está definida al menos en  $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ ; es decir,  $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset I_x$ . Como podemos suponer que  $\delta \leq \varepsilon$ , esto implica que  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(x_0, \delta) \subset D(f)$ , y prueba que  $D(f)$  es abierto.

Veamos ahora que  $\Phi$  es de clase  $C^k$  si  $f$  lo es. Sea  $(t_0, x_0) \in D(f)$ , y supongamos por ejemplo  $t_0 \geq 0$ . Sabemos, por el Teorema 2.13, que para cada  $x \in \Omega$  existe  $\varepsilon(x) > 0$  tal que  $\Phi(t, y)$  está bien definido y es de clase  $C^k$  para  $(t, y) \in (-\varepsilon(x), \varepsilon(x)) \times B(x, \varepsilon(x))$ . Como  $\Gamma := \{\phi(t, x_0) : t \in [0, t_0]\}$  es compacto, podemos recubrirlo por una cantidad finita de estas bolas  $\text{int}B(x, \varepsilon(x))$ . Se deduce entonces que existen  $\varepsilon > 0$  y un abierto  $\Omega_0$  que contiene a  $\Gamma$  y está contenido en  $\Omega$  tal que  $\Phi$  está definido y es de clase  $C^k$  en  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega_0$ . Sea ahora  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $t_0/m < \varepsilon$ , y definamos  $h := t_0/m$ . Denotemos  $\Phi_h(x) := \Phi(h, x)$ , y observemos que  $\Phi_h$  está bien definido y es de clase  $C^k$  en  $\Omega_0$ . Sabemos que  $\Phi$  está definido y es de clase  $C^k$  en  $(-\delta_0, \delta_0) \times B(x_0, \delta_0)$  para algún  $\delta_0 > 0$ . Nótese que la Proposición 5.1 implica que

$$\Phi(t, x) = \Phi_h^m(\Phi(t - t_0, x)).$$

Como la aplicación  $(t, x) \mapsto \Phi(t - t_0, x)$  es de clase  $C^k$  en  $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \times B(x_0, \delta_0)$ , luego en particular es continua, y en  $(t_0, x_0)$  vale  $x_0$ , que está en  $\Omega_0$ , podemos encontrar un  $\delta_1 \in (0, \delta_0]$  tal que  $\Phi(t - t_0, x) \in \Omega_0$  si  $(t, x) \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1) \times B(x_0, \delta_1)$ , y así

$$\Phi_h(\Phi(t - t_0, x))$$

está bien definido y es de clase  $C^k$  en  $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1) \times B(x_0, \delta_1)$ . Reiterando este mismo razonamiento  $m$  veces llegamos a que existe un número  $\delta_m > 0$  tal que

$$\Phi_h^{m-1}(\Phi(t - t_0, x)) \in \Omega_0$$

si  $(t, x) \in (t_0 - \delta_m, t_0 + \delta_m) \times B(x_0, \delta_m)$ , lo que implica que

$$\Phi(t, x) = \Phi_h^m(\Phi(t - t_0, x))$$

está bien definido en  $(t_0 - \delta_m, t_0 + \delta_m) \times B(x_0, \delta_m)$ . Además, este argumento muestra que  $\Phi(t, x)$  es composición de  $m + 1$  aplicaciones de clase  $C^k$ , luego es de clase  $C^k$  en este entorno de  $(t_0, x_0)$ . Como el punto  $(t_0, x_0)$  es arbitrario, se deduce que  $\Phi : D(f) \rightarrow \Omega$  es de clase  $C^k$ .  $\square$

**Definición 5.2.** Se dice que un campo vectorial  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  es *completo* si el dominio  $D(f)$  del flujo asociado es todo  $\mathbb{R} \times \Omega$ .

**Observación 5.3.** Si  $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  es completo entonces el flujo de  $f$  define un sistema dinámico continuo de clase  $C^k$ .

Usando el Teorema 3.24 obtenemos una condición suficiente muy práctica para determinar cuándo un campo es completo.

**Proposición 5.4.** Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Si existen  $A, B$  tales que  $\|f(x)\| \leq A\|x\| + B$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $f$  es completo.

La siguiente proposición complementa la Observación 5.3.

**Proposición 5.5.** Sea  $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$  un sistema dinámico continuo de clase  $C^\infty$ . Definamos el campo vectorial  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$f(x) = \frac{d}{dt}\psi(t, x)|_{t=0}$$

(a  $f$  se le llama campo de velocidades de  $\psi$ ). Entonces  $f$  es completo y  $\psi$  es el flujo de  $f$ .

*Demostración.* Es claro que  $f$  es un campo vectorial de clase  $C^\infty$ . Además, cada curva  $t \mapsto \psi(t, x)$  es solución del PVI  $y'(t) = f(y(t))$ ,  $y(0) = x$ ; en efecto, para cada  $t \in \mathbb{R}$  tenemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(t+s, x) - \psi(t, x)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(s, \psi(t, x)) - \psi(t, x)}{s} = \frac{d}{ds}\psi(s, \psi(t, x))|_{s=0} = f(\psi(t, x)).$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt}\psi(t, x) = f(\psi(t, x)),$$

y por supuesto  $\psi(0, x) = x$ , ya que  $\psi_0 = \mathbb{I}$  por definición de sistema dinámico. Como cada curva integral  $t \mapsto \psi(t, x)$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ , esto implica que  $\psi$  es el flujo del campo vectorial  $f$ , y que  $f$  es completo.  $\square$

Incluso cuando un campo no es completo, siempre puede encontrarse otro campo que sí es completo y cuyas curvas integrales son geoméricamente las mismas, sólo que reparametrizadas y por tanto recorridas a diferente velocidad. Ver el Teorema 5.19 más adelante en este capítulo. Por tanto, a efectos del estudio teórico de las propiedades de las órbitas de un sistema autónomo cuyo campo de vectores está definido en un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , puede siempre suponerse que el flujo de dicho campo vectorial está definido en todo  $\mathbb{R} \times \Omega$ .

El siguiente resultado resume las propiedades más importantes del flujo que hemos visto hasta ahora.

**Teorema 5.6.** El flujo  $\Phi$  de un campo vectorial  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  es una aplicación de clase  $C^k$  definida del abierto  $D(f)$  en el abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , y que tiene las siguientes propiedades:

1.  $\Phi(0, x) = x$  para todo  $x \in \Omega$ .
2.  $\Phi(s+t, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$  para todo  $x \in \Omega, s+t \in I_x$ .
3. Si  $t, -t \in I_x$  para todo  $x \in \Omega$ , entonces la aplicación  $\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega$  (definida por  $x \mapsto \Phi_t(x) := \Phi(t, x)$ ) es un difeomorfismo de clase  $C^k$  con inversa  $\Phi_{-t}$ .

En particular, si  $f$  es completo, el conjunto de aplicaciones  $\{\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega \mid t \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de  $\Omega$ .

**Corolario 5.7.** Sea  $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ . Equivalen:

1.  $\Psi$  es un sistema dinámico continuo de clase  $C^\infty$ .
2.  $\{\psi_t : \Omega \rightarrow \Omega \mid t \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de clase  $C^\infty$ .
3. Existe  $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$  campo vectorial completo tal que  $\psi$  es el flujo de  $f$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio para el lector.  $\square$

El Teorema 5.6 permite dar una demostración sencilla de un resultado muy útil en topología diferencial:

**Teorema 5.8** (lema de Morse). *Sea  $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Supongamos que para dos valores reales  $a < b$  los conjuntos de nivel  $g^{-1}(a)$  y  $g^{-1}(b)$  no son vacíos, y que existe una constante  $c$  tal que*

$$\|\nabla g(x)\| \geq c > 0$$

*para todo  $x \in g^{-1}([a, b])$ . Entonces los conjuntos de nivel  $g^{-1}(a)$  y  $g^{-1}(b)$  son difeomorfos (y de hecho existe un difeomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que lleva un conjunto en el otro).*

*Demostración.* Consideremos el campo vectorial de clase  $C^1$

$$f(x) = \frac{1}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g(x)$$

definido en un entorno abierto de  $g^{-1}([a, b])$ . Nótese que

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\|\nabla g(x)\|} \leq \frac{1}{c}$$

para todo  $x \in g^{-1}([a, b])$ , es decir  $f$  está acotada en este conjunto. Entonces (usando por ejemplo particiones de la unidad)  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  admite una extensión acotada a todo  $\mathbb{R}^n$ , que seguimos denotando  $f$ . Al ser este campo vectorial acotado, es completo, es decir, su flujo  $\Phi$  está definido de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , y es una aplicación de clase  $C^1$  tal que para cada  $t \in \mathbb{R}$  la aplicación  $\Phi_t := \Phi(t, x)$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo, con inversa  $\Phi_{-t}$ .

En particular  $\Phi_{b-a} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo (con inversa  $\Phi_{a-b}$ ), y vamos a comprobar que este difeomorfismo tiene la propiedad de que

$$\Phi_{b-a}(g^{-1}(a)) = g^{-1}(b).$$

En efecto, consideremos la función  $\theta_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\theta_x(t) = g(\Phi(t, x)).$$

Se tiene que

$$\theta'_x(t) = \langle \nabla g(\Phi(t, x)), \frac{d}{dt} \Phi(t, x) \rangle = \langle \nabla g(\Phi(t, x)), f(\Phi(t, x)) \rangle = 1,$$

luego si  $x \in g^{-1}(a)$  se deduce que  $\theta_x(t) = a + t$ , ya que  $\theta_x(0) = g(\Phi(0, x)) = g(x) = a$ . Por tanto  $\theta_x(b-a) = b$  si  $x \in g^{-1}(a)$ , y esto significa que

$$\Phi_{b-a}(g^{-1}(a)) \subseteq g^{-1}(b).$$

Por otra parte, si  $y \in g^{-1}(b)$  se tiene  $\theta_y(t) = b + t$ ; en particular  $\theta_y(a-b) = a$ , y esto implica que

$$\Phi_{a-b}(g^{-1}(b)) \subseteq g^{-1}(a).$$

Veamos finalmente que  $\Phi_{b-a}(g^{-1}(a)) = g^{-1}(b)$ ; sólo falta comprobar que si  $y \in g^{-1}(b)$  entonces existe  $x \in g^{-1}(a)$  tal que  $\Phi_{b-a}(x) = y$ . Y en efecto, dado  $y \in g^{-1}(b)$ , tomando  $x = \Phi_{a-b}(y)$ , sabemos que  $x \in g^{-1}(a)$ , y se tiene

$$\Phi_{b-a}(x) = \Phi_{b-a}(\Phi_{a-b}(y)) = y,$$

ya que  $\Phi_{b-a} \circ \Phi_{a-b} = \mathbb{I}$ .  $\square$

Concluimos esta sección con un resultado que generaliza el Teorema 4.6 al caso de sistemas no necesariamente lineales y nos dice precisamente cómo varía el volumen de un conjunto al aplicarle el difeomorfismo  $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$  dado por el flujo para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 5.9** (Liouville). *Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial completo. Entonces para todo subconjunto medible  $E$  de  $\Omega$  y todo  $t \in \mathbb{R}$ , el volumen de  $\Phi_t(E)$  viene dado por la fórmula*

$$\text{vol}(\Phi_t(E)) = \int_E \exp \left( \int_0^t \text{div} f(\Phi(s, x)) ds \right) dx.$$

Además, si  $E$  es compacto, también se tiene

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\Phi_t(E)) = \int_{\Phi_t(E)} \text{div}(f(x)) dx.$$

*Demostración.* En efecto, por el teorema del cambio de variables,

$$\text{vol}(\Phi_t(E)) = \int_E \det(D_x \Phi(t, x)) dx,$$

pero sabemos por la demostración del Teorema 2.13 que  $D_x \Phi(t, x)$  es la única solución de la primera ecuación variacional

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) \\ Y(0) = \mathbb{I}, \end{cases}$$

donde  $A(t) := Df(\Phi(t, x))$ . Ahora bien, por la fórmula de Liouville 4.8 también sabemos que

$$\det Y(t) = \exp \left( \int_0^t \text{tr}(A(s)) ds \right),$$

que en nuestro caso equivale a

$$\det D_x \Phi(t, x) = \exp \left( \int_0^t \text{tr}(Df(\Phi(s, x))) ds \right),$$

y como  $\text{tr} Df = \text{div} f$ , obtenemos que

$$\text{vol}(\Phi_t(E)) = \int_E \det(D_x \Phi(t, x)) dx = \int_E \exp \left( \int_0^t \text{div} f(\Phi(s, x)) ds \right) dx,$$

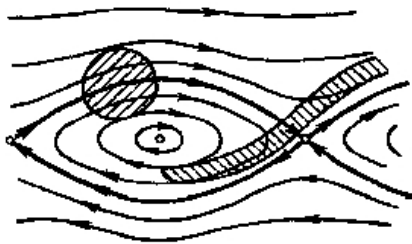
lo que prueba la primera parte del enunciado.

Para demostrar la segunda parte, calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{vol}(\Phi_t(E)) &= \frac{d}{dt} \int_E \det(D_x \Phi(t, x)) dx = \int_E \frac{d}{dt} \det(D_x \Phi(t, x)) dx = \\ &= \int_E \frac{d}{dt} \exp \left( \int_0^t \text{div} f(\Phi(s, x)) ds \right) dx = \int_E \text{div} f(\Phi(t, x)) \exp \left( \int_0^t \text{div} f(\Phi(s, x)) ds \right) dx = \\ &= \int_E \text{div} f(\Phi(t, x)) \det(D_x \Phi(t, x)) dx = \int_{\Phi_t(E)} \text{div} f(y) dy, \end{aligned}$$

donde en la primera y en la última igualdad hemos usado el teorema del cambio de variable y en la segunda el teorema de derivación bajo el signo integral (aplicable gracias a la compacidad de  $E$ ).  $\square$

Obsérvese que la hipótesis de compacidad en la segunda parte del enunciado del teorema anterior es en general necesaria, porque de otra forma las integrales de la primera parte del enunciado podrían ser infinitas, y no tiene sentido derivar funciones que toman valores infinitos.



**Corolario 5.10.** Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial completo. Supongamos que  $\text{div} f = 0$ . Entonces el flujo de  $f$  preserva los volúmenes de los subconjuntos medibles de  $\Omega$ . Es decir, para todo subconjunto medible  $E$  de  $\Omega$  y todo  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\text{vol}(\Phi_t(E)) = \text{vol}(E).$$

Recíprocamente, si sucede esto para cada  $E$ ,  $t$ , entonces se tiene que  $\text{div} f = 0$ .

Así, este tipo de campos vectoriales  $f$  con  $\text{div} f = 0$  intuitivamente pueden representar el campo de velocidades de un fluido incompresible que se mueve en el espacio de fases.

### 5.3. Órbitas, puntos de equilibrio, diagramas de fases

En esta sección vamos a estudiar cómo pueden clasificarse las curvas integrales de un campo vectorial y cuáles son sus propiedades más básicas. Esencialmente veremos que hay tres tipos de curvas: las que son constantes (*puntos de equilibrio*), las que no se cortan a sí mismas (*inyectivas*), y las que se cortan en al menos un punto y entonces están obligadas a ser *periódicas*.

**Definición 5.3.** Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se dice que  $x_0 \in \Omega$  es un *punto de equilibrio* de  $f$  (o del sistema  $x' = f(x)$ ) si  $f(x_0) = 0$ . A los puntos de equilibrio también se les llama puntos estacionarios, o puntos singulares. Si  $x$  no es un punto de equilibrio se dice que  $x$  es un *punto regular*.

Se definen la *órbita positiva* de un punto  $x$  como

$$\mathcal{O}_x^+ = \{\Phi(t, x) : t \geq 0\},$$

donde como es habitual  $\Phi(t, x)$  denota el flujo de  $f$ ; la *órbita negativa* de  $x$  como

$$\mathcal{O}_x^- = \{\Phi(t, x) : t \leq 0\},$$

y la *órbita* de  $x$  como

$$\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x^+ \cup \mathcal{O}_x^- = \{\Phi(t, x) : t \in I_x\}.$$

**Proposición 5.11.** Si  $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y \neq \emptyset$  entonces  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ . Es decir, dos órbitas distintas son siempre disjuntas.

*Demostración.* La Proposición 5.1 implica que  $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_x$  siempre que  $z \in \mathcal{O}_x$ . En efecto, si denotamos  $z = \Phi(s, x)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x &= \{\Phi(r, x) : r \in I_x\} = \{\Phi(s+t, x) : t \in -s + I_x\} = \\ &= \{\Phi(t, \Phi(s, x)) : t \in -s + I_x\} = \{\Phi(t, z) : t \in -s + I_x\} = \{\Phi(t, z) : t \in I_z\} = \mathcal{O}_z, \end{aligned}$$

donde en la segunda y la cuarta igualdad hemos usado la Proposición 5.1. Por tanto, si  $z \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$  se tiene que  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_z = \mathcal{O}_y$ .  $\square$

**Definición 5.4.** Llamaremos *diagrama de fases* de  $x' = f(x)$  a la partición de  $\Omega$  en órbitas.

En la práctica el diagrama de fases consistirá para nosotros en el dibujo de una cantidad finita de órbitas significativas de un campo  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (significativas en el sentido de que esta selección de curvas cubra todas las situaciones interesantes que presenta el conjunto de las órbitas de  $f$ , que por supuesto es infinito y por tanto no puede dibujarse).

**Proposición 5.12.** *Si una curva integral  $t \mapsto \Phi(t, x)$  se corta a sí misma entonces es periódica.*

*Demostración.* Si  $\Phi(t_0, x) = \Phi(s_0, x)$ ,  $s_0 < t_0$ , entonces, denotando  $T = t_0 - s_0$  tenemos, por las propiedades del flujo,

$$\Phi(t+T, x) = \Phi(t+t_0-s_0, x) = \Phi(t-s_0, \Phi(t_0, x)) = \Phi(t-s_0, \Phi(s_0, x)) = \Phi(t-s_0+s_0, x) = \Phi(t, x),$$

lo que implica que  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es periódica de período  $T$  (que no necesariamente coincide con su período mínimo).  $\square$

No es difícil ver que toda función periódica no constante y continua tiene un período mínimo; ver el problema 5.6.

**Teorema 5.13.** *Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Consideremos la órbita  $\mathcal{O}_x$  de un punto  $x$ . Hay exactamente tres posibilidades excluyentes entre sí:*

1.  $\mathcal{O}_x = \{x\}$ , lo que sucede si y sólo si  $x$  es un punto de equilibrio.
2.  $\mathcal{O}_x$  es difeomorfa a una circunferencia, lo que sucede si y sólo si la curva  $\Phi_x(t)$  es periódica (con período mínimo estrictamente positivo).
3.  $\mathcal{O}_x$  es difeomorfa a una recta, lo que sucede si y sólo si la curva  $\Phi_x(t)$  es inyectiva.

*Demostración.* Si  $\mathcal{O}_x$  no se corta a sí misma entonces la curva  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es inyectiva, y esta misma aplicación proporciona un difeomorfismo entre  $I_x$  (que a su vez es difeomorfo a  $\mathbb{R}$ ) y  $\mathcal{O}_x$ . Si por el contrario  $\mathcal{O}_x$  se corta a sí misma, entonces por la proposición anterior la curva  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es periódica. Si su período mínimo es 0 entonces  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es constante, y por tanto  $\mathcal{O}_x$  es un punto de equilibrio. Si su período mínimo  $T$  es estrictamente positivo, entonces la aplicación  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_x$  definida por

$$h(e^{it}) = \Phi\left(\frac{T}{2\pi}t, x\right),$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$ , es un difeomorfismo  $C^1$  entre la circunferencia unidad y la órbita  $\mathcal{O}_x$ , y en este caso decimos que  $\mathcal{O}_x$  es *periódica*.  $\square$

La siguiente proposición nos dice que las órbitas inyectivas, si tienen límite dentro de  $\Omega$  al aproximarse a un extremo de su intervalo maximal de definición, entonces sólo pueden *acabar* en un punto de equilibrio. Por supuesto, también pueden *acabar* en la frontera de  $\Omega$ , o, cuando el tiempo maximal es infinito, permanecer dentro de  $\Omega$  sin acabar en ningún punto concreto (por ejemplo porque den vueltas aproximándose en espiral a una órbita periódica).

**Proposición 5.14.** *Sean  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de clase  $C^1$ ,  $x \in \Omega$ , y denotemos  $I_x = (\alpha, \beta)$ , el intervalo maximal de definición de  $\Phi_x(t)$ . Supongamos que existe  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \Phi_x(t) = x_0 \in \Omega$ . Entonces  $\beta = +\infty$ , y  $x_0$  es un punto de equilibrio.*

*(Análogamente, si existe  $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \Phi_x(t) = y_0$  entonces  $\alpha = -\infty$  e  $y_0$  es un punto de equilibrio.)*

*Demostración.* Como  $\mathcal{O}_x^+ = \{\Phi(t, x) : t \in [0, \beta)\}$  está contenida en el compacto  $\{\Phi(t, x) : t \in [0, \beta)\} \cup \{x_0\}$ , por el Corolario 3.17 debe tenerse  $\beta = +\infty$ . Entonces las hipótesis del enunciado implican que existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi'_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\Phi(t, x)) = f(x_0).$$



Entonces, si denotamos  $\xi(t) = \Phi(t, x)$ , y  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  son las funciones componentes de  $\xi(t)$ , aplicando el teorema del valor medio en el intervalo  $[t, t+1]$  a cada una de estas funciones obtenemos que existe  $s_t^j \in [t, t+1]$  tal que

$$\xi_j(t+1) - \xi_j(t) = \xi_j'(s_t^j).$$

Tomando límites cuando  $t \rightarrow \infty$ , y teniendo en cuenta que ya sabemos que existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi'(t) = f(x_0)$ , obtenemos

$$0 = x_0^j - x_0^j = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_j(t+1) - \xi_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_j'(s_t^j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_j'(t)$$

para cada  $j = 1, \dots, n$ , luego

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi'(t) = f(x_0),$$

y así resulta que  $x_0$  es un punto de equilibrio.  $\square$

A continuación enunciamos dos proposiciones que son bastante útiles en la práctica a la hora de dibujar diagramas de fases, y cuyas demostraciones, aún sin ser triviales, proponemos como ejercicios muy interesantes para el lector (limitándonos a indicarle que es conveniente usar la Proposición 5.14).

**Proposición 5.15.** *Sea  $C$  una curva cerrada simple en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (con  $n \geq 2$ ), y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ . Supongamos que  $C$  no contiene puntos de equilibrio de  $f$ , y que  $\mathcal{O}_x \subseteq C$ . Entonces  $\mathcal{O}_x = C$ , y en particular la curva  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es periódica.*

**Proposición 5.16.** *Sea  $C$  un conjunto homeomorfo a una recta en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ . Supongamos que  $C$  no contiene puntos de equilibrio de  $f$ , y que  $\mathcal{O}_x \subseteq C$ . Entonces  $\mathcal{O}_x = C$ , y en particular la curva  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es inyectiva.*

## 5.4. Integrales primeras de un campo

En esta sección estudiamos otra herramienta que resulta muy útil a la hora de dibujar diagramas de fase.

**Definición 5.5.** Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial  $C^1$ . Se dice que una función continua y no constante  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una *integral primera* del campo  $f$  si  $H$  es constante sobre las curvas integrales de  $f$ , es decir si para todo  $x$  existe  $c_x$  tal que  $H(\Phi(t, x)) = c_x$  para todo  $t \in I_x$ .

Por tanto si  $H$  es una integral primera de  $f$ , las curvas integrales de  $f$  están contenidas en los conjuntos de nivel de  $H$ . Esto resulta especialmente interesante en dimensión  $n = 2$  ya que en este caso los conjuntos de nivel de  $H$  son típicamente curvas (o puntos). Cuando una de estas curvas no contiene puntos de equilibrio entonces pueden aplicarse las Proposiciones 5.15 o 5.16 para deducir que este conjunto de nivel es en realidad una curva integral del sistema. En la selección de problemas al final de este capítulo pueden encontrarse ejemplos que ilustran esta técnica.

A continuación vemos una condición que caracteriza las integrales primeras de un campo vectorial.

**Proposición 5.17.** *Sea  $H$  una función diferenciable, no constante. Entonces  $H$  es una integral primera de un campo  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  si y sólo si  $\langle \nabla H(x), f(x) \rangle = 0$  para todo  $x \in \Omega$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ): Si  $H(\Phi(t, x))$  es constante para todo  $t$  entonces, derivando,

$$0 = \frac{d}{dt} H(\Phi(t, x)) = \langle \nabla H(\Phi(t, x)), \frac{d}{dt} \Phi(t, x) \rangle = \langle \nabla H(\Phi(t, x)), f(\Phi(t, x)) \rangle,$$

y en particular (haciendo  $t = 0$ ) tenemos que  $\langle \nabla H(x), f(x) \rangle = 0$ .

( $\Leftarrow$ ): Si  $\langle \nabla H(y), f(y) \rangle = 0$  para todo  $y$ , entonces el mismo cálculo (poniendo  $y = \Phi(t, x)$ ) prueba que

$$\frac{d}{dt} H(\Phi(t, x)) = \langle \nabla H(\Phi(t, x)), f(\Phi(t, x)) \rangle = 0,$$

luego la función  $t \mapsto H(\Phi(t, x))$  es constante para cada  $x$ , es decir,  $H$  es constante sobre cada curva integral de  $f$ .  $\square$

Una familia de ejemplos típicos de sistemas con integrales primeras es la de los *sistemas conservativos*, en los que la *energía total* permanece constante a lo largo de cada curva integral (y por tanto dicha energía es una integral primera). Ver el problema 5.12.

## 5.5. Reparametrización

Un cambio de parámetro (o reparametrización) es una aplicación estrictamente monótona y derivable entre dos intervalos de  $\mathbb{R}$ ,

$$\sigma : J \rightarrow I.$$

Si se aplica un cambio de parámetro a una solución  $x(t)$  de la ecuación  $x' = f(x)$ , se tiene que la función  $y(s) = x(\sigma(s))$  satisface la ecuación  $y'(s) = \sigma'(s)f(y(s))$ . El efecto es simplemente que varía la velocidad con la que se recorre cada trayectoria, pero no la propia trayectoria: las imágenes de las curvas  $x$  e  $y$  son la misma. Cuando  $\sigma$  es creciente, la trayectoria se recorre además en el mismo sentido, mientras que si  $\sigma$  es decreciente,  $y$  recorre la trayectoria de  $x$  en sentido contrario al de esta.

Puesto que los cambios de sentido en el recorrido de las trayectorias son indeseables desde nuestro punto de vista (porque, entre otras cosas, afectan a conceptos tales como la estabilidad de un sistema, que estudiaremos en los próximos capítulos), en lo que sigue consideraremos sólo cambios de parámetro que sean crecientes.

A veces, mediante un cambio de parámetro se puede simplificar una ecuación diferencial.

**Proposición 5.18.** *Sea  $f$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido sobre un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\rho : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  una función continua y estrictamente positiva. Entonces, dada una solución  $x(t)$  del PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = \rho(x(t))f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

*es posible encontrar un cambio de parámetro  $\sigma$  tal que  $y(s) = x(\sigma(s))$  es solución de*

$$\begin{cases} y'(s) = f(y(s)) \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.5)$$

*Por tanto, las órbitas de los sistemas  $x' = \rho(x)f(x)$  y  $x' = f(x)$  son las mismas, y en particular los diagramas de fases de estos dos sistemas son iguales.*

*Demostración.* Suponiendo  $x : I \rightarrow \Omega$ , consideremos la función

$$\tau(t) = \int_0^t \rho(x(s))ds$$

definida sobre  $I$ . Nótese que  $\tau'(t) = \rho(x(t)) > 0$ , luego  $\tau$  estrictamente creciente, y por tanto tiene una inversa  $\sigma : \tau(I) \rightarrow I$ ,

$$\sigma(s) = \tau^{-1}(s),$$

que también es estrictamente creciente, y su derivada viene dada por

$$\sigma'(s) = \frac{1}{\tau'(\sigma(s))} = \frac{1}{\rho(x(\sigma(s)))}.$$

En particular  $\sigma$  es un cambio de parámetro. Entonces, si  $x(t)$  es solución de (5.4), y definimos  $y(s) = x(\sigma(s))$ , tenemos que

$$y'(s) = \sigma'(s)x'(\sigma(s)) = \frac{1}{\rho(x(\sigma(s)))}\rho(x(\sigma(s)))f(x(\sigma(s))) = f(y(s)),$$

luego  $y(s)$  es solución de (5.5). □

El siguiente resultado nos dice que, dado cualquier campo vectorial  $C^1$  en un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , no necesariamente completo, siempre puede encontrarse otro campo que sí es completo y tiene el mismo diagrama de fases. Por tanto, a efectos del estudio teórico de las propiedades de las órbitas de un sistema autónomo en un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , puede siempre suponerse que el flujo de dicho campo vectorial está definido en todo  $\mathbb{R} \times \Omega$ .

**Teorema 5.19.** Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Entonces existe un campo vectorial completo  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  tal que, para cada  $x \in \Omega$ ,

$$\mathcal{O}_x^f := \{\Phi(f)(t, x) : t \in I_x\} = \{\Phi(g)(t, x) : t \in \mathbb{R}\} =: \mathcal{O}_x^g,$$

donde  $\Phi(f)$  y  $\Phi(g)$  denotan el flujo de  $f$  y el flujo de  $g$ , respectivamente. Es decir,  $f$  y  $g$  tienen los mismos diagramas de fases.

*Demostración.* Para fijar las ideas fundamentales, veamos primero el caso más fácil en que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . En este caso basta definir

$$\rho(x) = \frac{1}{1 + \|f(x)\|^2},$$

que es una función de clase  $C^1$  y estrictamente positiva en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, si ponemos

$$g(x) := \rho(x)f(x),$$

es evidente que  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  y acotado, luego por la Proposición 5.4  $g$  es completo, y por la Proposición 5.18 los sistemas  $x' = f(x)$  y  $x' = g(x)$  tienen los mismos diagramas de fases.

Consideremos ahora el caso más difícil en que  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ . Ahora ya no podemos usar la misma función  $\rho$  y la Proposición 5.4, porque las soluciones podrían acabar en la frontera de  $\Omega$  en tiempo finito. Lo que vamos a hacer para corregir este defecto es multiplicar la función  $\rho$  anterior por una función  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  de clase  $C^1$  que sea estrictamente positiva en  $\Omega$ , e idénticamente nula fuera de  $\Omega$ . Este tipo de funciones  $\theta$  siempre existen para cualquier abierto (e incluso con  $k = \infty$ ); véase por ejemplo [3, Problema 10.34]. De hecho la misma construcción de esta función  $\theta$  puede modificarse de forma sencilla para obtener que

$$\lim_{y \in \Omega, y \rightarrow x} \theta(x) (\|f(x)\| + \|Df(x)\|) = 0 \quad (5.6)$$

para todo  $x \in \partial\Omega$ .

Definamos pues

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\theta(x)f(x)}{1 + \|f(x)\|^2} & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

y observemos que  $\tilde{g} \in C(\mathbb{R}^n)$ . Es también evidente que  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Veamos que  $\tilde{g}$  también es diferenciable, con derivada continua, en  $\partial\Omega$ . Dado  $x \in \partial\Omega$ , tenemos  $\tilde{g}(x) = 0$ ,  $\theta(x) = 0$ ,  $D\theta(x) = 0$  y, para todo  $y \in \Omega$ ,

$$\|\tilde{g}(y) - \tilde{g}(x)\| = \left\| \frac{\theta(y)f(y)}{1 + \|f(y)\|^2} \right\| \leq |\theta(y)| = |\theta(y) - \theta(x) - D\theta(x)(y - x)| = o(|y - x|).$$

Por otra parte, si  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  entonces  $|\tilde{g}(y) - \tilde{g}(x)| = 0$ . Por tanto  $\tilde{g}$  es diferenciable en  $x$ , con  $D\tilde{g}(x) = 0$ . La derivada de  $\tilde{g}$  es entonces

$$D\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{(1 + \|f(x)\|^2)(D\theta(x)(\cdot)f(x) + \theta(x)Df(x)(\cdot)) - 2\theta(x)\langle f(x), Df(x)(\cdot) \rangle}{(1 + \|f(x)\|^2)^2} & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

y usando (5.6) es inmediato ver que  $D\tilde{g}$  es continua en  $\partial\Omega$ . Por tanto  $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Además, es evidente que  $\tilde{g}$  es acotado, y por tanto, por la Proposición 5.4 su flujo está definido en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Considerando la restricción de este campo  $\tilde{g}$  a  $\Omega$ , denotándola por  $g$ , y aplicando la Proposición 5.18, vemos que

los diagramas de fases de  $g$  y de  $f$  son iguales. Para terminar, sólo queda ver que las curvas integrales de  $\tilde{g}$  que comienzan en  $\Omega$  permanecen en  $\Omega$  para todo tiempo  $t \in \mathbb{R}$ , lo que equivale a decir que el flujo  $\Phi(g)(t, x)$  de  $g$  es también completo. Y en efecto, dado  $x \in \Omega$ , si existiera  $t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\Phi(\tilde{g})(t_1, x) \in \partial\Omega$  entonces  $t \mapsto \Phi(\tilde{g})(t, x)$  sería solución del PVI

$$\begin{cases} z'(t) = \tilde{g}(z(t)) \\ z(t_1) = \Phi(\tilde{g})(t_1, x). \end{cases}$$

Pero la única solución de este problema es la constante,  $z(t) = \Phi(\tilde{g})(t_1, x)$ , ya que todos los puntos de  $\partial\Omega$  son de equilibrio para el campo  $\tilde{g}$ . Entonces tendríamos que  $\Phi(\tilde{g})(t, x) = \Phi(\tilde{g})(t_1, x)$  para todo  $t$ , lo cual es absurdo, ya que  $\Phi(\tilde{g})(0, x) = x \notin \partial\Omega \ni \Phi(\tilde{g})(t_1, x)$ .  $\square$

**Observación 5.20.** El enunciado del teorema anterior es también cierto cambiando  $C^1$  por  $C^k$ , y la demostración es muy parecida, aunque las dificultades técnicas son mayores; se invita al lector a considerarlas, y a resolverlas si este problema lo motiva suficientemente.

## 5.6. Problemas

**Problema 5.1.** Dibujar el campo vectorial  $f(x, y) = (y, -\sin x)$  asociado a la ecuación del péndulo  $x'' + \sin x = 0$ .

**Problema 5.2.** ¿Puede  $\phi(t) = (\sin(t), \sin(2t))$  ser solución de una ecuación autónoma  $x' = f(x)$ ? ¿Y de una ecuación no autónoma?

**Problema 5.3.** Demostrar que  $\Phi(t, x) = e^t(1 + x) - 1$  es un sistema dinámico continuo, y hallar el campo vectorial del cual es flujo.

**Problema 5.4.** Calcular el flujo  $\Phi(t, x, y)$  del sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2, \end{cases}$$

y esbozar su diagrama de fases.

**Problema 5.5.** Calcular el flujo paramétrico  $\Phi(t, x, a, b)$  de la ecuación logística  $z' = az - bz^2$ , indicando su dominio. Obtener y resolver las ecuaciones variacionales lineales asociadas a las derivadas parciales del flujo respecto de las variables  $x, a, b$ , y comparar los resultados con los conseguidos al derivar directamente la fórmula para  $\Phi(t, x, a, b)$ .

**Problema 5.6.** Demostrar que si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, periódica y no constante, entonces  $\gamma$  posee un período mínimo  $T > 0$ .

**Problema 5.7.** Sea  $C$  una curva cerrada simple en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (con  $n \geq 2$ ), y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ . Supongamos que  $C$  no contiene puntos de equilibrio de  $f$ , y que  $\mathcal{O}_x \subseteq C$ . Demostrar que entonces  $\mathcal{O}_x = C$ , y en particular la curva  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es periódica.

**Problema 5.8.** Sea  $C$  un conjunto homeomorfo a una recta en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ . Supongamos que  $C$  no contiene puntos de equilibrio de  $f$ , y que  $\mathcal{O}_x \subseteq C$ . Probar que entonces  $\mathcal{O}_x = C$ , y en particular la curva  $t \mapsto \Phi(t, x)$  es inyectiva.

**Problema 5.9.** Hallar integrales primeras de los campos siguientes, y dibujar el diagrama de fases del sistema  $(x', y') = f(x, y)$ :

1.  $f(x, y) = (y, -x)$
2.  $f(x, y) = (y, x)$

$$3. f(x, y) = (x(1 - y), -y(1 - y))$$

$$4. f(x, y) = (x(y^2 - x), -y(y^2 - x))$$

**Problema 5.10.** Probar que el campo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x, y)$  no posee ninguna integral primera (no constante).

**Problema 5.11.** Probar que todo sistema de la forma

$$\begin{cases} x' = f(y) \\ y' = g(x) \end{cases}$$

admite una integral primera de la forma  $H(x, y) = A(x) + B(y)$ .

**Problema 5.12** (Teorema de conservación de la energía). Consideremos un sistema  $x'' = f(x)$ , donde  $f(x) = -\nabla U(x)$ , siendo  $U \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Se define la *energía cinética* del sistema como

$$T(x') = \frac{1}{2} \|x'\|^2,$$

la *energía potencial* como  $U(x)$ , y la *energía total* como

$$E(t) = T(x'(t)) + U(x(t)).$$

Probar que se tiene

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0$$

para todo  $t$ , es decir, la energía total del sistema permanece constante a lo largo de cada curva integral.

Se dice que un sistema de esta forma es un *sistema conservativo*.

**Problema 5.13.** Los *modelos de combate de Lanchester* distinguen entre combates regulares (en los que las bajas producidas en el ejército enemigo son proporcionales a la talla del ejército propio), y los de tipo guerrilla (en los que el número de bajas es proporcional al número de encuentros entre las fuerzas contendientes). El combate entre ejércitos regulares (sin refuerzos) corresponde al sistema lineal

$$\begin{cases} x' = -ay \\ y' = -bx \end{cases} \quad (5.7)$$

con  $a, b > 0$ . El combate guerrilla ( $x$ )-regular ( $y$ ) da lugar a

$$\begin{cases} x' = -cxy \\ y' = -bx, \end{cases} \quad (5.8)$$

y el combate guerrilla-guerrilla se comporta según el sistema

$$\begin{cases} x' = -cxy \\ y' = -dxy. \end{cases} \quad (5.9)$$

En todos los casos las constantes  $a, b, c, d$  guardan relación con la potencia de tiro por unidad de cada ejército.

- Comprobar la *ley de los cuadrados de Lanchester*, según la cual en el combate (5.7) la cantidad  $ay^2 - bx^2$  permanece constante. Indicar para qué valores iniciales  $x_0, y_0$  resulta derrotado el ejército  $x$ , y para cuáles los dos ejércitos se aniquilan mutuamente. ¿Qué efecto tiene la duplicación de la razón  $y_0/x_0$ ?

- Probar que en el combate 5.8 se cumple la *ley parabólica*  $cy^2 - 2bx = \text{constante}$  ¿En qué medida deberá incrementar  $y$  su potencial inicial  $y_0$  para mantener su ventaja si se duplica el número inicial  $x_0$  de guerrilleros?
- Demostrar que en el combate 5.9 se cumple la *ley lineal*  $dy - cx = \text{constante}$ .

**Problema 5.14.** Probar que toda solución de  $x'' + x + x^3 = 0$  es periódica.

**Problema 5.15.** Usar el Teorema 5.9 para demostrar el siguiente resultado (*criterio negativo de Bendixson*): en un sistema plano  $(x', y') = f(x, y)$  no existen órbitas periódicas no constantes dentro de ninguna región simplemente conexa en la que  $\text{div} f$  tenga signo constante.

**Problema 5.16.** Más en general, probar el siguiente *criterio negativo de Dulac*: si  $\Omega$  es un dominio simplemente conexo del plano y  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$  y existe una función  $\mu : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  de clase  $C^1$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu f) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu g)$$

tiene signo constante en  $\Omega$ , entonces el sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

no tiene órbitas periódicas no constantes en  $\Omega$ .

**Problema 5.17.** Probar que el sistema

$$\begin{cases} x' = x + f(y) \\ y' = g(x) - 2y, \end{cases}$$

donde  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ , no tiene ninguna órbita periódica no trivial.

**Problema 5.18.** Sea  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, de clase  $C^1$ , y tal que  $H$  alcanza un mínimo global en un único punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Demostrar que, para  $c > H(x_0)$ , los conjuntos de nivel  $H(x) = c$  definen variedades diferenciables de clase  $C^1$  y codimensión uno en  $\mathbb{R}^n$ , todas ellas difeomorfas a esferas. En particular, en el caso  $n = 2$ , probar que dichos conjuntos de nivel son curvas cerradas simples.

**Problema 5.19.** Sea  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Encontrar una integral primera del campo  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  definido por

$$f = \left( \frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

**Problema 5.20.** Demostrar que el flujo del campo vectorial  $f$  del ejercicio anterior preserva los volúmenes de las regiones en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Problema 5.21.** Demostrar que si  $\Omega$  es un abierto *acotado* de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  y completo tal que  $\text{div} f \geq 0$ , entonces el flujo de  $f$  tiene la siguiente propiedad: para todo abierto  $U$  de  $\Omega$  existen  $x \in U$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\Phi(n, x) \in U$ .

*Indicación:* considerar la sucesión de conjuntos  $\{\Phi(n, U)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Problema 5.22.** Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial  $C^1$  que posee una órbita periódica no constante  $C = \mathcal{O}_{z_0}$ . Denotemos por  $U$  la región interior a  $C$ , y por  $\Phi$  el flujo de  $f$ . Demostrar que para cada  $z \in U$  se tiene que  $\Phi(t, z)$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y que  $\Phi_t(U) = U$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Problema 5.23.** Hallar una integral primera del campo asociado a la ecuación del péndulo  $x'' + \sin x = 0$ , y dibujar el diagrama de fases correspondiente.

**Problema 5.24.** Dibujar el diagrama de fases del sistema  $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$ .

**Problema 5.25.** Dibujar el diagrama de fases del sistema  $\begin{cases} x' = e^x - 1 \\ y' = -ye^x \end{cases}$ .

**Problema 5.26.** Probar que toda solución del sistema  $\begin{cases} x' = ye^{1+x^2+y^2} \\ y' = -xe^{1+x^2+y^2} \end{cases}$  es periódica.

**Problema 5.27.** La carga  $x(t)$  en un circuito eléctrico no lineal viene dada por

$$(1 - x'(t)^2)x''(t) + \lambda x'(t) + x(t) = 0.$$

Hallar una integral primera en el caso  $\lambda = 0$  y trazar las órbitas. ¿Qué sucede en las rectas  $x = \pm 1$ ?

**Problema 5.28.** En todos los problemas anteriores, identificar los campos vectoriales cuyos flujos preservan volúmenes.





## Capítulo 6

# Estructura local del flujo. Sistemas conjugados. Clasificación topológica de los flujos lineales hiperbólicos.

En este capítulo iniciaremos el estudio del comportamiento local del flujo de un sistema autónomo  $x' = f(x)$ . Como es bien sabido, las ecuaciones diferenciales no admiten en general soluciones explícitas, y por ello resulta necesario disponer de métodos que permitan obtener información al menos sobre el comportamiento del sistema en un entorno de un punto dado  $x_0$ . Cuando este punto es *regular* (es decir  $f(x_0) \neq 0$ ), veremos que el comportamiento del flujo es localmente trivial cerca de  $x_0$ , en el sentido de que al cortar las órbitas del sistema con un entorno adecuado de  $x_0$  obtenemos una colección de trozos de curvas *casi paralelos* al vector  $f(x_0)$ ; este resultado se conoce como el teorema del flujo tubular. Por consiguiente, desde un punto de vista local, el sistema presentará un comportamiento interesante sólo en los puntos  $x_0$  que sean de equilibrio. En estos puntos de equilibrio, la cuestión fundamental que nos ocupará en este capítulo y que culminará en el siguiente es esta: ¿hasta qué punto el comportamiento del sistema lineal  $x' = Df(x_0)x$  es una buena aproximación del comportamiento real de un sistema no lineal  $x' = f(x)$ , al menos si estamos suficientemente cerca de  $x_0$ ? Como veremos, la respuesta más rotunda a esta pregunta es que si los autovalores de  $Df(x_0)$  tienen partes reales no nulas, se podrán encontrar entornos abiertos  $U$  y  $V$  del punto  $x_0$  y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  que lleva la intersección de  $U$  con el diagrama de fases del sistema  $x' = f(x)$  en la intersección de  $V$  con el diagrama de fases del sistema  $x' = Df(x_0)x$ . En este sentido podrá decirse que nuestra aproximación lineal del sistema no lineal es fiable, porque el diagrama de fases de la aproximación lineal es similar al diagrama de fases del sistema no lineal, en un entorno suficientemente pequeño del punto de equilibrio. Este tipo de preguntas está en estrecha relación con una cuestión muy importante en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias: la de la *estabilidad* de un punto de equilibrio, que puede resumirse en estas dos preguntas (suponiendo por ejemplo que el flujo de  $f$  es completo). ¿Si  $x$  está suficientemente cerca de un punto de equilibrio  $x_0$ , permanecerá  $\Phi(t, x)$  cerca de  $x_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ? ¿Sucederá incluso que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = x_0$ ?

Para empezar a analizar estas cuestiones con más precisión necesitamos una nueva noción, la de campos vectoriales conjugados, y también hacer un estudio del comportamiento de los sistemas lineales cerca del origen.

### 6.1. Cambios de coordenadas y campos conjugados

A veces un cambio de coordenadas adecuado puede simplificar un sistema, incluso hasta el punto de poder obtener una solución trivial en las nuevas coordenadas. Por ejemplo, consideremos la ecuación del péndulo sin rozamiento  $x'' + x = 0$ , que es equivalente al sistema lineal autónomo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

cuya solución podemos calcular mediante la exponencial de su matriz y la teoría recordada en el Capítulo 4. Una forma más directa de encontrar las soluciones de este sistema es hacer un cambio a coordenadas polares, es decir  $x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$ ,  $y = \rho(t) \sin \theta(t)$ . Igualando la derivada de la primera de estas expresiones a la segunda expresión, y la derivada de la segunda expresión al opuesto de la primera expresión, y después de ciertas simplificaciones sencillas, obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{cases} \rho'(t) = 0 \\ \theta'(t) = -1, \end{cases}$$

cuyas soluciones son  $(\rho(t), \theta(t)) = (\rho_0, \theta_0 - t)$ , y se concluye deshaciendo el cambio de coordenadas que las soluciones del primer sistema son  $x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t$ ,  $y(t) = y_0 \cos t - x_0 \sin t$ .

Esta idea de transformar un sistema en otro potencialmente más simple mediante el uso de un difeomorfismo local es la que nos lleva a la siguiente definición.

**Definición 6.1.** Sea  $h : U \rightarrow V$  un difeomorfismo de clase  $C^k$  entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de clase  $C^1$ . Se define el campo  $h_*f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$y = h(x) \mapsto h_*f(y) := Dh(x)f(x) = Dh(h^{-1}(y))f(h^{-1}(y)).$$

Con esta definición de  $h_*f$  se cumple que  $\gamma$  es una curva integral de  $f$  que pasa por  $x_0$  si y sólo si  $h \circ \gamma$  es una curva integral de  $h_*f$  que pasa por  $y_0 = h(x_0)$ . De hecho esta propiedad caracteriza al campo  $h_*f$ , como vemos a continuación.

**Proposición 6.1** (Cambios de coordenadas). Sean  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos  $C^k$ , y sea  $h : U \rightarrow V$  un difeomorfismo de clase  $C^k$ . Si  $\Phi(f) : D(f) \rightarrow U$  y  $\Phi(g) : D(g) \rightarrow V$  son los flujos de  $f$  y  $g$ , respectivamente, las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $g = h_*f$
2.  $(t, x) \in D(f) \iff (t, h(x)) \in D(g)$ , y  $h(\Phi(f)(t, x)) = \Phi(g)(t, h(x))$  para todo  $(t, x) \in D(f)$ .

*Demostración.* ( $\implies$ ): Sea  $x \in U$ , y denotemos  $y = h(x)$ . Sea  $\gamma(t) = \Phi(f)(t, x)$ ,  $\sigma(t) = h(\gamma(t))$ . Derivando obtenemos

$$\sigma'(t) = Dh(\gamma(t))\gamma'(t) = Dh(\gamma(t))f(\gamma(t)) = h_*f(h(\gamma(t))) = h_*f(\sigma(t)) = g(\sigma(t)),$$

y por supuesto  $\sigma(0) = h(\gamma(0)) = h(x) = y$ . Por tanto  $h$  lleva curvas integrales de  $z' = f(z)$  definidas en un intervalo  $J$  en curvas integrales de  $z' = g(z)$  definidas en el mismo intervalo  $J$ . Análogamente  $h^{-1}$  lleva curvas integrales del segundo sistema en curvas integrales del primero. Como  $h$  es biyectiva esto implica también que  $I_x^f = I_{h(x)}^g$  para cada  $x \in U$  (donde  $I_x^f$  denota el intervalo de existencia de la solución maximal de  $z' = f(z)$ ,  $z(0) = x$ ). En suma,  $D(f) = D(g)$ , y  $h(\Phi(f)(t, x)) = \Phi(g)(t, h(x))$  para todo  $(t, x) \in D(f)$ .

( $\impliedby$ ): Partiendo de la igualdad  $h(\Phi(f)(t, x)) = \Phi(g)(t, h(x))$ , derivando respecto de  $t$  y luego poniendo  $t = 0$  se obtiene directamente  $Dh(x)f(x) = g(h(x))$  para todo  $x$ , lo que significa que  $h_*f = g$ .  $\square$

**Definición 6.2** (Campos conjugados). Cuando se cumple una (y por tanto ambas) de las condiciones de la proposición anterior, se dice que  $f$  y  $g$  son campos  $C^k$  *conjugados*. También se dice que  $f$  y  $g$  son campos *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tal que se cumple la segunda condición de la proposición (en este caso la primera condición ya no tiene sentido en general).

Es fácil demostrar (y se propone como ejercicio) que la relación de conjugación que acabamos de definir es una relación de equivalencia entre campos. Es inmediato que toda conjugación topológica  $h$  entre dos campos  $f$  y  $g$  lleva las órbitas de  $f$  en las órbitas de  $g$ ; es decir,

$$h(\mathcal{O}_x^f) = h\left(\{\Phi(f)(t, x) : t \in I_x^f\}\right) = \mathcal{O}_{h(x)}^g = \{\Phi(g)(t, h(x)) : t \in I_{h(x)}^g\},$$

donde  $I_x^f$  denota el intervalo de existencia de la solución maximal de  $z' = f(z)$ ,  $z(0) = x$ . También es fácil probar, y se deja como ejercicio, que  $h$  lleva puntos de equilibrio en puntos de equilibrio, órbitas periódicas en órbitas periódicas, y órbitas inyectivas en órbitas inyectivas.

En general puede decirse que el aspecto cualitativo del sistema se conserva por conjugaciones topológicas.

El siguiente resultado nos dice exactamente cuándo dos sistemas lineales son  $C^k$ -conjugados para  $k \geq 1$ . El caso  $k = 0$  (es decir, conjugación topológica) es diferente y lo estudiaremos al final de este capítulo.

**Proposición 6.2.** Sean  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Los sistemas  $x' = Ax$  y  $x' = Bx$  son  $C^k$  conjugados para algún  $k \geq 1$ .
2. Existe  $P$  isomorfismo lineal tal que  $Pe^{tA} = e^{tB}P$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
3. existe  $P$  isomorfismo lineal tal que  $PA = BP$  (es decir  $A$  y  $B$  son semejantes).

*Demostración.* (1)  $\implies$  (3): Como el flujo de  $z' = Az$  es  $e^{tA}x$  y el de  $z' = Bz$  es  $e^{tB}x$ , la hipótesis de conjugación entre estos sistemas equivale a decir que existe un difeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$  tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Derivando esta igualdad respecto de  $t$  obtenemos

$$Dh(e^{tA}x)Ae^{tA}x = Be^{tB}h(x),$$

y poniendo  $t = 0$  que

$$Dh(x)Ax = Bh(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . En particular para  $x = 0$  se tiene

$$0 = Dh(0)A0 = Bh(0).$$

Por tanto

$$Dh(x)Ax = Bh(x) - Bh(0) = B(h(x) - h(0))$$

Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Fijando ahora  $y \in \mathbb{R}^n$  y considerando  $x$  de la forma  $x = \lambda y$ , con  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  obtenemos

$$\lambda Dh(\lambda y)Ay = Dh(\lambda y)A(\lambda y) = B(h(\lambda y) - h(0)),$$

luego

$$Dh(0)Ay = \lim_{\lambda \rightarrow 0} Dh(\lambda y)Ay = \lim_{\lambda \rightarrow 0} B \frac{h(\lambda y) - h(0)}{\lambda} = BDh(0)y,$$

es decir, denotando  $P = Dh(0)$ , tenemos

$$PAy = BP_y$$

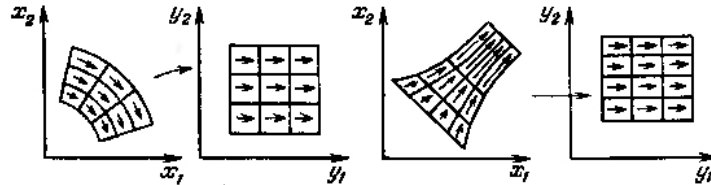
para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ , luego  $A$  y  $B$  son semejantes (nótese que  $\det P \neq 0$  ya que  $h$  es difeomorfismo).

(3)  $\implies$  (2): Sabemos que esto es así por la teoría del Capítulo 4.

(2)  $\implies$  (1): es trivial. □

### 6.2. Estructura local de las órbitas cerca de un punto regular

El siguiente resultado nos dice que si  $x_0$  es un punto regular de  $x' = f(x)$  entonces  $f$  es localmente  $C^k$ -conjugado, cerca de  $x_0$ , a un campo constante no nulo (por ejemplo  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0)$ ). Por tanto el aspecto del diagrama de fases de  $x' = f(x)$  cerca de  $x_0$  va a ser simplemente el de una colección de trozos de curvas que están muy cerca de ser paralelos al vector  $f(x_0)$ . En este sentido puede decirse que el comportamiento local de cualquier sistema autónomo cerca de un punto regular es bastante trivial.



**Teorema 6.3** (del flujo tubular). Sean  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^k$ , y  $x_0$  un punto regular (es decir  $f(x_0) \neq 0$ ). Entonces existen entornos  $U$  y  $V$  de  $x_0$  y de  $0$  respectivamente, y existe un difeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  de clase  $C^k$  tales que  $h_*f = g$ , donde  $g(y) \equiv (1, 0, \dots, 0)$ .

Es decir, para todo sistema autónomo  $x' = f(x)$  existe un cambio de coordenadas local, en un entorno de un punto regular, que lo transforma en el sistema

$$\begin{cases} y'_1 = 1 \\ y'_2 = 0 \\ \vdots \\ y'_n = 0. \end{cases}$$

En particular, las intersecciones de las órbitas con dicho entorno son difeomorfas a una colección de segmentos paralelos (flujo tubular).

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x_0 = 0$  y también, salvo composición con un isomorfismo lineal, que  $f(0) = (1, 0, \dots, 0)$ . Para los puntos  $x$  del hiperplano  $x_1 = 0$ , el difeomorfismo  $h$  que buscamos debe llevar el punto  $\Phi(t, (0, x_2, \dots, x_n))$  al punto  $(0, x_2, \dots, x_n) + t(1, 0, \dots, 0) = (t, x_2, \dots, x_n)$ . Por tanto  $h$  debe ser una inversa local de

$$\psi(x) = \Phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n)),$$

aplicación que está bien definida en un entorno de  $0$ . El jacobiano de  $\psi$  en  $0$  viene dado por

$$\det D\psi(0) = \det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right)_{|_{t=0, x=0}} = \det \mathbb{I} = 1 \neq 0,$$

ya que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t=0, x=0} = \mathbb{I}, \text{ y } \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0, x=0} = f(0) = (1, 0, \dots, 0).$$

Entonces podemos aplicar el teorema de la función inversa para deducir que existen entornos  $V$  y  $U$  de  $0$  tales que  $\psi : V \rightarrow U$  es un difeomorfismo de clase  $C^k$ , con una inversa  $\psi^{-1} : U \rightarrow V$  que denotaremos  $h = \psi^{-1}$ . Observemos que

$$D\psi(x)g(x) = D\psi(x)(1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=x_1} (0, x_2, \dots, x_n) = f(\Phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n))) = f(\psi(x)),$$

es decir  $f = \psi_*g$ , y por tanto  $g = h_*f$ . □

### 6.3. Clasificación topológica de los flujos lineales hiperbólicos

En esta sección vamos a responder a la siguiente pregunta: ¿cuando dos sistemas lineales  $x' = Ax$ ,  $x' = Bx$  son topológicamente conjugados?

Comenzamos estudiando un dos casos especiales de sistemas lineales: *los surtidores* y *los sumideros*.

**Definición 6.3.** Sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Se dice que  $A$  es una contracción, y que 0 es un *sumidero* del sistema  $x' = Ax$ , si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Se dice que  $A$  es una dilatación, y que 0 es un *surtidor* del sistema  $x' = Ax$ , si  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA}x = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

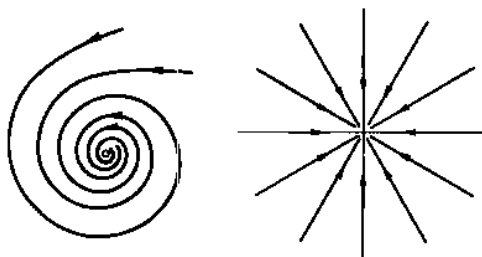
Es fácil ver que si  $A$  es dilatación o contracción entonces  $\det A \neq 0$ . También es fácil demostrar que si  $A$  y  $B$  son topológicamente conjugados entonces  $A$  es contracción (resp. dilatación) si y sólo si  $B$  lo es, y que  $A$  es contracción si y sólo si  $-A$  es dilatación.

De hecho el siguiente teorema nos dice que todos los sumideros lineales son topológicamente conjugadas a  $x' = -x$ .

**Teorema 6.4.** Sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. 0 es un sumidero del sistema  $x' = Ax$ .
2.  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  para todo  $\lambda$  autovalor de  $A$ .
3. Existen  $K, b > 0$  tal que  $\|e^{tA}x\| \leq K e^{-bt}\|x\|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ .
4. El sistema  $x' = Ax$  es topológicamente conjugado con  $x' = -x$ .

Antes de demostrar el teorema detengámonos un momento para sopesar la fuerza de la afirmación (4) de este enunciado. Por ejemplo si  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  para algún autovalor  $\lambda$  de  $A$  con  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , sabemos que hay soluciones  $y(t)$  que convergen *en espiral* al origen, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces una conjugación topológica  $h$  como la que proporciona (4) debe *desenrollar* esta espiral  $y(t)$ , transformándolas en la curva integral  $e^{-t}h(y(0))$ , que para  $t \in [0, \infty)$  parametriza el segmento de recta  $(0, h(y(0)))$  y converge al origen en tiempo infinito. Que una aplicación  $h$  sea capaz de producir este efecto de enderezamiento de las espirales impide que su inversa  $h^{-1}$  sea diferenciable en el origen. Por esta razón, entre otras, en el teorema anterior la conjugación  $h$  no puede obtenerse de clase  $C^1$ , salvo cuando  $A$  es semejante a  $-\mathbb{I}$  (ver la Proposición 6.2).



Sin embargo, el teorema nos dice que sí que puede obtenerse un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que desenrolla todas estas espirales, transformándolas en segmentos semiabiertos, lo cual es en sí mismo bastante notable.

A la vez este hecho muestra las limitaciones de las conjugaciones topológicas para estudiar el aspecto cualitativo de un sistema autónomo: la información de que haya soluciones que converjan en espiral al origen, dando infinitas vueltas cada vez más cerradas antes de llegar a él, es ciertamente relevante, y sin embargo las conjugaciones topológicas no preservan estos fenómenos. Por ello si uno quiere tener una idea más precisa del comportamiento cualitativo de un sistema autónomo, lo mejor es manejar conjugaciones de clase  $C^1$  por lo menos, siempre que sea posible.

*Demostración del Teorema 6.4.* (4)  $\implies$  (1): es inmediata, teniendo en cuenta las observaciones anteriores (ver el problema 6.10), y el hecho evidente de que  $x' = -x$  es contracción (su flujo es  $e^{-t}x$ ).

(1)  $\implies$  (2): si existiera un autovalor  $\lambda = \alpha + i\beta$  de  $A$  con  $\operatorname{Re}\lambda = \alpha \geq 0$  entonces también existiría una solución de  $x' = Ax$  de la forma  $y(t) = e^{t\alpha} \cos(t\beta)u_0 + e^{t\alpha} \sin(t\beta)v_0$  (donde  $\beta$  puede ser nulo, y  $u_0, v_0$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$ , al menos uno de ellos no nulo. Para esta solución *no se tiene que*  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ , lo que contradice (1).

(2)  $\implies$  (3): tomemos  $b$  tal que

$$0 < b < \min\{-\operatorname{Re}\lambda : \lambda \text{ autovalor de } A\},$$

y observemos que

$$e^{tA} = e^{-tb} e^{t(A+bI)}. \quad (6.1)$$

Por la definición de  $b$ , y recordando el problema 4.23, todas las entradas de la matriz de  $e^{t(A+bI)}$  están acotadas por funciones del tipo  $e^{t(\operatorname{Re}\lambda+b)} C(A)(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n)$ , donde  $C(A)$  es una constante que sólo depende de  $A$  y  $\lambda$  es un autovalor de  $A$ , y como  $\operatorname{Re}\lambda + b < 0$ , cada una de estas cotas tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ , luego (al ser continuas) estas cotas están acotadas uniformemente en  $[0, \infty)$ . Por tanto existe  $K > 0$  tal que

$$\|e^{t(A+bI)}\| \leq K$$

para todo  $t \in [0, \infty)$ , lo que combinado con (6.1) nos permite concluir que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ke^{-tb}\|x\|$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y todo  $t \geq 0$ .

(3)  $\implies$  (4). Definamos  $Q(x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle dt$  (aquí  $\|\cdot\|$  se supone que es la norma euclídea usual). Es fácil comprobar que  $Q$  está bien definida y es una forma cuadrática definida positiva (que proviene de un producto escalar en  $\mathbb{R}^n$  y define una norma equivalente a la usual). En particular existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $\alpha\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \beta\|x\|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Fijemos ahora  $x \neq 0$  y definamos

$$g(t) = Q(e^{tA}x).$$

Nótese que, para todo  $t \geq 0$ , (3) implica que

$$Q(e^{-tA}x) \geq \alpha\|e^{-tA}x\|^2 \geq \frac{\alpha}{K^2} e^{2bt} \|e^{tA}e^{-tA}x\|^2 = \frac{\alpha}{K^2} e^{2bt} \|x\|^2,$$

luego  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q(e^{-tA}x)\| = \infty$ , lo que equivale a decir que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \infty.$$

Por otro lado, para todo  $t \geq 0$ ,

$$g(t) = Q(e^{tA}x) \leq \beta\|e^{tA}x\| \leq \beta Ke^{-bt}\|x\|,$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

Por tanto existe algún  $t_x \in \mathbb{R}$  tal que  $g(t_x) = 1$ . Pero además

$$g(t) = \int_0^\infty \|e^{sA}e^{tA}x\|^2 ds = \int_0^\infty \|e^{(s+t)A}x\|^2 ds = \int_t^\infty \|e^{uA}x\|^2 du,$$

luego

$$g'(t) = -\|e^{tA}x\|^2 < 0 \quad (6.2)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y por tanto este número  $t_x$  es el único con esta propiedad.

Además, considerando la función  $F(x, t) = Q(e^{tA}x)$  y la ecuación  $F(x, t) = 1$ , podemos usar el teorema de la función implícita y el hecho de que  $\partial F/\partial t = g'(t) < 0$  si  $x \neq 0$  para deducir que la función  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto t(x) := t_x \in \mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$ .

Definamos ahora  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$h(x) = \begin{cases} e^{t(x)}e^{t(x)A}x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Lo que va a hacer esta aplicación  $h$  es *enderezar* el flujo  $e^{tA}x$ , manteniendo invariante el elipsoide  $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 1\}$ . La manera en que esto se consigue es la siguiente: para cada  $x$ , averiguamos el tiempo  $t(x)$  en que la órbita  $\{e^{tA}x : t \in \mathbb{R}\}$  corta al elipsoide  $\{Q = 1\}$ , y transformamos esta órbita en la semirrecta cuyo extremo es el origen y que pasa por el punto de corte  $e^{t(x)A}x$ , llevando el punto  $x$  al punto que dista  $e^{t(x)}$  del origen dentro de esta semirrecta.

Veamos que  $h$  es en efecto una conjugación topológica entre los sistemas  $x' = Ax$  y  $x' = -x$ . Supongamos que  $x \neq 0$ , y que

$$y = h(x) = e^{t(x)}e^{t(x)A}x,$$

entonces

$$e^{-t(x)}y = e^{t(x)A}x,$$

y aplicando  $Q$  y usando la definición de  $t(x)$  tenemos

$$e^{-2t(x)}Q(y) = Q(e^{t(x)A}x) = 1,$$

es decir

$$t(x) = \frac{1}{2} \log Q(y),$$

y por tanto

$$x = e^{-t(x)A}(e^{-t(x)}y) = \frac{1}{Q(y)^{1/2}}e^{-\frac{1}{2} \log(Q(y))A}y.$$

Estos cálculos muestran que  $h$  es una biyección con inversa

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{Q(y)^{1/2}}e^{-\log(Q(y)^{1/2})A}y & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

cuya restricción a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  es un difeomorfismo  $C^\infty$ .

Además  $h^{-1}$  es continua en 0, ya que, para  $0 < Q(y) < 1$ , usando (3), tenemos

$$\begin{aligned} Q(h^{-1}(y)) &= Q\left(\frac{1}{Q(y)^{1/2}}e^{-\log(Q(y)^{1/2})A}y\right) = \frac{1}{Q(y)}Q\left(e^{-\log(Q(y)^{1/2})A}y\right) \leq \\ &\frac{1}{Q(y)}\beta \left\|e^{-\log(Q(y)^{1/2})A}y\right\|^2 \leq \frac{\beta K^2}{Q(y)}e^{2b \log(Q(y)^{1/2})\|y\|^2} = \beta K^2 Q(y)^b \frac{\|y\|^2}{Q(y)} \leq \\ &\frac{\beta K^2}{\alpha} Q(y)^b, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{Q(y) \rightarrow 0} Q(h^{-1}(y)) = 0,$$

y como  $Q^{1/2}$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$  se deduce que

$$\lim_{y \rightarrow 0} Q(h^{-1}(y)) = 0 = h^{-1}(0).$$

Por otro lado, si  $y = h(x) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} h^{-1}(e^{-t}y) &= \frac{1}{Q(e^{-t}y)^{1/2}} e^{-\log(Q(e^{-t}y)^{1/2})A} e^{-t}y = \frac{1}{Q(y)^{1/2}} e^{-\log(e^{-t}Q(y)^{1/2})A} y = \\ &= \frac{1}{Q(y)^{1/2}} e^{(-\log(e^{-t}) - \log(Q(y)^{1/2}))A} y = \frac{1}{Q(y)^{1/2}} e^{tA} e^{-\log(Q(y)^{1/2})A} y = e^{tA} h^{-1}(y), \end{aligned}$$

es decir

$$h^{-1}(e^{-t}h(x)) = e^{tA}x,$$

que equivale a

$$h(e^{tA}x) = e^{-t}h(x).$$

Sólo queda ver que  $h$  es continua en 0. Obsérvese que si  $Q(x) = 1$  entonces  $g(0) = 1$ , luego  $t(x) = 0$ , y así  $h(x) = x$ . Es decir,  $h$  fija los puntos del elipsoide  $\{Q = 1\}$ , y en particular deja este elipsoide invariante. Además, si  $0 < Q(x) < 1$  entonces  $g(0) = Q(x) < 1$ , y como  $g$  es decreciente y  $t(x)$  es la única solución de  $g = 1$ , tenemos  $t(x) < 0$ , luego

$$Q(h(x)) = Q\left(e^{t(x)}e^{t(x)A}x\right) = e^{2t(x)}Q\left(e^{t(x)A}x\right) = e^{2t(x)} < 1.$$

Es decir  $h$ , y por tanto también  $h^{-1}$ , lleva  $\{Q \leq 1\}$  en  $\{Q \leq 1\}$ . Entonces

$$h^{-1}|_{\{Q \leq 1\}} : \{Q \leq 1\} \rightarrow \{Q \leq 1\}$$

es biyectiva y continua, y como  $\{Q \leq 1\}$  es compacto entonces su inversa, que coincide con la restricción de  $h$  a  $\{Q \leq 1\}$ , también es continua. En particular esto implica que  $h$  es continua en 0.  $\square$

**Observación 6.5.** En la demostración del teorema anterior se ha construido una función positiva  $Q$  tal que  $DQ(x)Ax = -\|x\|^2 < 0$  para todo  $x \neq 0$  (es decir la función  $Q$  decrece en la dirección del campo vectorial  $A$ , o equivalentemente, dicho campo apunta hacia dentro de los elipsoides  $Q(x) = \text{constante}$ ). Como veremos más adelante, a este tipo de función se le llama función de Liapunov, y resulta muy útil para estudiar la estabilidad de los sistemas dinámicos.

El teorema anterior tiene una versión análoga para surtidores.

**Teorema 6.6.** Sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. 0 es un surtidor del sistema  $x' = Ax$ .
2.  $\text{Re}\lambda > 0$  para todo  $\lambda$  autovalor de  $A$ .
3. Existen  $K, b > 0$  tales que  $\|e^{sA}x\| \leq K e^{bs}\|x\|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \geq 0$ .
4. Existen  $K; b > 0$  tales que  $K^{-1}e^{bt} \leq \|e^{tA}y\|$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$  y todo  $t \geq 0$ .
5. El sistema  $x' = Ax$  es topológicamente conjugado con  $x' = x$ .

*Demostración.* Se deja al cuidado del lector (basta aplicar el teorema anterior al sistema  $x' = -Ax$ ).  $\square$

Pasamos ahora a estudiar la clasificación de los sistemas lineales cuyos autovalores pueden tener signos distintos.

**Definición 6.4** (Índice de estabilidad de los operadores hiperbólicos). Sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Se dice que  $A$  es un operador *hiperbólico* si todos sus autovalores tienen parte real no nula. En este caso se llama *índice de estabilidad* de  $A$  al número de autovalores con parte real negativa, contados con su multiplicidad.



**Definición 6.5** (Variedades estable e inestable). Sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  un operador hiperbólico. Se define la variedad estable de  $A$  como

$$E_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0\},$$

y la variedad inestable de  $A$  como

$$E_u = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA}x = 0\}.$$

**Teorema 6.7.** Sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  un operador hiperbólico con índice de estabilidad  $s$ . Entonces:

1.  $E_s, E_u$  son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ , con  $\dim E_s = s$ , y  $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u$ .
2.  $E_s, E_u$  son subespacios invariantes tanto por el campo  $A$  como por el flujo  $e^{tA}$  (es decir,  $A(E_s) \subseteq E_s$ ,  $e^{tA}(E_s) \subseteq E_s$ , y análogamente para  $E_u$ ).
3. Existen  $k, b > 0$  tales que

$$\begin{aligned} \|e^{tA}x\| &\leq k e^{-bt} \|x\| \quad \text{para todo } x \in E_s, \\ \|e^{tA}x\| &\geq k e^{bt} \|x\| \quad \text{para todo } x \in E_u. \end{aligned}$$

4.  $E_s$  está generado por los elementos de  $\text{Ker}(A - \lambda_j)^{a_j}$ , donde los  $\lambda_j$  son los autovalores con parte real negativa de  $A$  y  $a_j$  es la multiplicidad algebraica de  $\lambda_j$ . Análogamente para  $E_u$  (cambiando autovalores con parte real negativa por autovalores con parte real positiva).

*Demostración.* Se deja al cuidado del lector, con las siguientes indicaciones: en primer lugar, por la Proposición 6.2, es fácil ver que basta probarlo suponiendo que  $A$  coincide con su forma canónica de Jordan  $J_A$ . En segundo lugar, si escribimos  $\mathbb{R}^n = E_- \oplus E_+$  y

$$J_A = J = \begin{pmatrix} J^- & 0 \\ 0 & J^+ \end{pmatrix},$$

donde  $J^- : E_- \rightarrow E_-$  agrupa los bloques de Jordan correspondientes a los autovalores de  $A$  con parte real positiva, y  $J^+ : E_+ \rightarrow E_+$  agrupa los bloques correspondientes a los autovalores con parte real negativa, es fácil ver usando los teoremas 6.4 y 6.6 que  $E_s = E_-$ , y  $E_u = E_+$ .  $\square$

**Teorema 6.8** (Clasificación topológica de los flujos lineales hiperbólicos). Sean  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  dos operadores hiperbólicos. Entonces los flujos de  $x' = Ax$  y de  $x' = Bx$  son topológicamente conjugados si y sólo si  $A$  y  $B$  tienen el mismo índice de estabilidad.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ): Nuevamente basta probarlo para  $A = J_A$  (su forma canónica de Jordan) y  $B = J_B$ . La matriz  $J_A$  puede expresarse en la forma

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

donde  $J_1 : E_1 \rightarrow E_1$  es una matriz de Jordan con autovalores de parte real negativa y  $J_2 : E_2 \rightarrow E_2$  es una matriz de Jordan con autovalores de parte real positiva, y  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$ . Por el Teorema 6.4 el sistema  $x'_1 = J_1 x_1$  es topológicamente conjugado (mediante un homeomorfismo  $h_1 : E_1 \rightarrow E_1$ ) con  $x'_1 = -x_1$ , y por el Teorema 6.6  $x'_2 = J_2 x_2$  es topológicamente conjugado (mediante otro homeomorfismo  $h_2 : E_2 \rightarrow E_2$ ) con  $x'_2 = x_2$ . Entonces es fácil comprobar que el homeomorfismo producto  $h(x_1, x_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2))$  define una conjugación topológica entre los sistemas  $x' = Jx$  y  $(x'_1, x'_2) = (-x_1, x_2)$ .

De todo esto se deduce que si  $A$  y  $B$  tienen el mismo índice de estabilidad entonces son topológicamente conjugados al sistema  $(x'_1, x'_2) = (-x_1, x_2)$ , y por tanto también son topológicamente conjugados entre sí.

( $\Leftarrow$ ): Si  $h$  es una conjugación topológica entre los flujos de  $A$  y de  $B$  entonces por el ejercicio 6.13 se tiene que  $h(E_s(A)) = E_s(B)$ . Y por el teorema de invariancia del dominio de Brouwer, los homeomorfismos entre abiertos de espacios euclídeos de dimensión finita conservan la dimensión, así que  $s(A) = s(B)$ .  $\square$

**6.4. Problemas**

**Problema 6.1.** Hacer un cambio a coordenadas polares en el plano para encontrar las soluciones de la ecuación  $x'' + x = 0$ .

**Problema 6.2.** Probar que la relación de conjugación entre campos vectoriales  $C^1$  es una relación de equivalencia.

**Problema 6.3.** Sea  $h$  una conjugación entre dos campos  $f$  y  $g$ . Probar también que  $h$  lleva puntos de equilibrio de  $f$  en puntos de equilibrio de  $g$ , órbitas periódicas de  $f$  en órbitas periódicas de  $g$ , y órbitas inyectivas de  $f$  en órbitas inyectivas de  $g$ .

**Problema 6.4.** Dibujar el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = \log x. \end{cases}$$

**Problema 6.5.** Encontrar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x' = x(x^2 + y^2)^{1/2} \\ y' = y(x^2 + y^2)^{1/2} \end{cases}$$

**Problema 6.6.** Consideremos los sistemas

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = y \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 0 \end{cases}$$

Comprobar que son conjugados y encontrar una conjugación entre ambos.

**Problema 6.7.** Esbozar el diagrama de fases y estudiar si son conjugados los sistemas lineales  $x' = Ax$ , siendo  $A$  cada una de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Problema 6.8.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -xy^2 \\ y' = -yx^2. \end{cases}$$

Expresarlo en coordenadas polares, y probar que las soluciones que comienzan en el disco  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  permanecen allí.

**Problema 6.9.** Consideremos los sistemas:

$$(a) \begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

Expresar (a) y (b) en coordenadas polares, esbozar el diagrama de fases, y estudiar si son localmente conjugados.

**Problema 6.10.** Probar que si  $A$  es dilatación o contracción entonces  $\det A \neq 0$ . Probar también que si  $A$  y  $B$  son topológicamente conjugados entonces  $A$  es contracción (resp. dilatación) si y sólo si  $B$  lo es.

**Problema 6.11.** Sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  una contracción, y definamos  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  por

$$Q(x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle dt.$$

Comprobar que  $Q$  está bien definida y es una forma cuadrática definida positiva que proviene de un producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ , y por tanto define una norma equivalente a la usual. Comprobar también que  $DQ(x)Ax = -\|x\|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Problema 6.12.** Demostrar el Teorema 6.7.

**Problema 6.13.** Demostrar que si  $h$  es una conjugación topológica entre los flujos de dos sistemas lineales  $x' = Ax$  y  $x' = Bx$  entonces  $h(E_s(A)) = E_s(B)$  es decir,  $h$  lleva la variedad estable de  $A$  en la de  $B$ .



## Capítulo 7

# Estabilidad de los sistemas no lineales.

En este capítulo comenzaremos a estudiar la importante<sup>1</sup> cuestión de la *estabilidad* de un sistema autónomo, y veremos que cuando un sistema no lineal  $x' = f(x)$  tiene un punto de equilibrio  $x_0$  tal que  $Df(x_0)$  es un operador hiperbólico (es decir, todos sus autovalores tienen parte real no nula), entonces la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal  $x' = f(x)$  equivale a la estabilidad del origen para el sistema lineal  $x' = Ax$ , donde  $A = Df(x_0)$  es la parte lineal de  $f$  en  $x_0$ .

### 7.1. Estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema autónomo

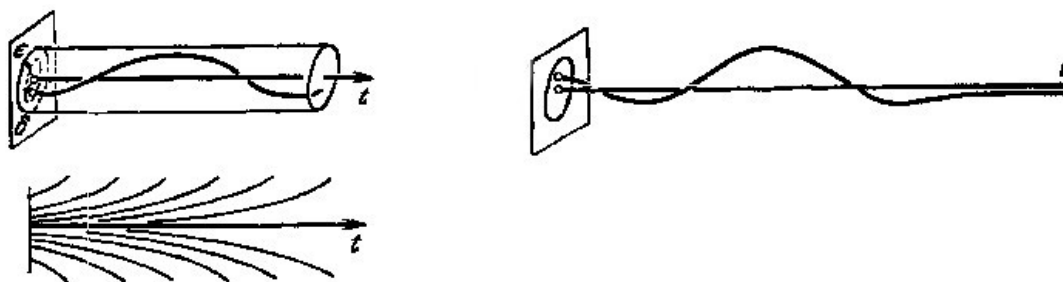
**Definición 7.1.** Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ , y sea  $x_0$  un punto de equilibrio de  $x' = f(x)$ .

1. Se dice que  $x_0$  es *estable* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  la solución  $\Phi(t, x)$  está definida para todo  $t \geq 0$  y se tiene que  $\Phi(t, x) \in B(x_0, \varepsilon)$  para todo  $t \geq 0$ .
2. Se dice que  $x_0$  es *asintóticamente estable* si  $x_0$  es estable y además existe  $r > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = x_0$$

para todo  $x \in B(x_0, r)$ .

3. Se dice que  $x_0$  es *inestable* si  $x_0$  no es estable.

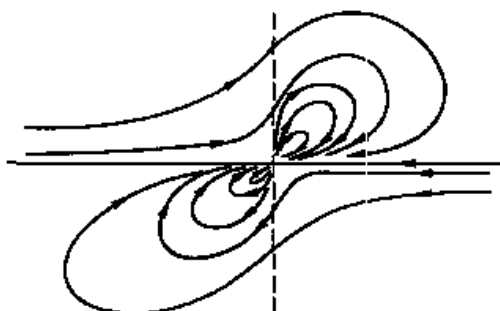


La afirmación de que  $x_0$  es estable equivale a la afirmación de que para toda sucesión  $(x_k)$  que converge a  $x_0$  se tiene que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t, x_k) = \Phi(t, x_0)$  uniformemente en  $t \in [0, +\infty)$  (ver el problema 7.1).

Conviene observar que existen sistemas autónomos con diagramas de fases como el de la siguiente figura, que muestran que la condición de que exista  $r > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = x_0$  para todo

<sup>1</sup>Un punto de equilibrio puede ser irrelevante (por ejemplo desde un punto de vista físico) si no es estable, porque pequeñas perturbaciones en la condición inicial pueden alejar mucho a la solución del punto de equilibrio. Como en la realidad física ninguna posición ni cantidad puede medirse con precisión absoluta, los puntos de equilibrio no estables no serán verdaderamente significativos para el físico.

$x \in B(x_0, r)$  no es suficiente para que  $x_0$  sea un punto de equilibrio estable de  $x' = f(x)$ . Es decir, hay puntos de equilibrio que son *atractivos* pero no estables.



**Proposición 7.1.** Sean  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vectoriales de clase  $C^1$  y sea  $h : U \rightarrow V$  una conjugación topológica entre  $f$  y  $g$ . Entonces  $x_0 \in U$  es un punto de equilibrio estable (resp. asintóticamente estable) si y sólo si  $h(x_0)$  es un punto de equilibrio estable (resp. asintóticamente estable) de  $g$ .

*Demostración.* Se propone como ejercicio para el lector. □

**Ejemplo 7.1.1.** Por lo visto en el Capítulo anterior, si  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tenemos que:

1. Si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa, entonces 0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema  $x' = Ax$ .
2. Si algún autovalor de  $A$  tiene parte real positiva, entonces 0 es un punto de equilibrio inestable de  $x' = Ax$ .
3. Si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real menor o igual que 0 y alguno de ellos tiene parte real nula y parte imaginaria no nula, entonces 0 es un punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable, de  $x' = Ax$ .

## 7.2. Sumideros no lineales. El principio de linealización

A continuación vemos que, en el caso en que la derivada de  $f$  en un punto de equilibrio  $x_0$  sea un operador hiperbólico, la estabilidad del sistema linealizado  $x' = Ax$  en 0, donde  $A = Df(x_0)$ , implica la estabilidad del sistema  $x' = f(x)$  en  $x_0$ .

**Teorema 7.2** (de primera aproximación, o principio de linealización). Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ , y sea  $x_0$  un punto de equilibrio de  $x' = f(x)$ .

1. Si todos los autovalores de la derivada  $Df(x_0)$  tienen parte real estrictamente negativa, entonces  $x_0$  es asintóticamente estable.
2. Si existe un autovalor de  $Df(x_0)$  con parte real estrictamente positiva, entonces  $x_0$  es inestable.

Cuando estamos en las condiciones de (1) se dice que el punto de equilibrio  $x_0$  de  $x' = f(x)$  es un *sumidero no lineal*. Si todos los autovalores tienen parte real positiva se habla de un *surtidor no lineal*. Cuando hay autovalores con partes reales de signos opuestos se dice que el punto de equilibrio es un *punto de silla*.

*Demostración.* Sea  $A = Df(x_0)$ . Si  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  para todo  $\lambda \in \sigma(A)$  (que denota el espectro de  $A$ ), probaremos que de hecho existen  $R, k, b > 0$  tales que

$$\|\Phi(t, x) - x_0\| \leq ke^{-bt}\|x - x_0\|$$

para todos  $x \in B(x_0, R)$ ,  $t \geq 0$ . Es claro que esto implica la estabilidad asintótica de  $x_0$ .

Podemos suponer que  $x_0 = 0$ , ya que los sistemas  $x' = f(x)$  e  $y' = f(y + x_0)$  son conjugados por una traslación). Se tiene entonces que

$$f(x) = Ax + R(x), \text{ con } \lim_{x \rightarrow 0} R(x)/\|x\| = 0.$$

Definamos

$$Q(x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt,$$

que como ya vimos en la demostración del Teorema 6.4 es una forma cuadrática definida positiva en  $\mathbb{R}^n$ , asociada a la forma bilineal

$$B(x, y) = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt,$$

y por tanto existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$\alpha\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \beta\|x\|^2$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Además

$$DQ(x)Ax = \frac{d}{dt}Q(e^{tA}x)|_{t=0} = -\|x\|^2,$$

donde en la última igualdad hemos usado la ecuación 6.2, de la prueba del Teorema 6.4, en el caso particular  $t = 0$ .

Entonces

$$DQ(x)f(x) = -\|x\|^2 + DQ(x)R(x),$$

y pueden combinarse los hechos de que  $DQ(x)y = 2B(x, y)$ , que  $|B(x, y)| \leq \beta\|x\|\|y\|$  para todo  $x, y$ , y que  $R(x) = o(\|x\|)$  para encontrar un  $r > 0$  tal que

$$DQ(x)f(x) \leq -\|x\|^2 \text{ si } Q(x) \leq r. \quad (7.1)$$

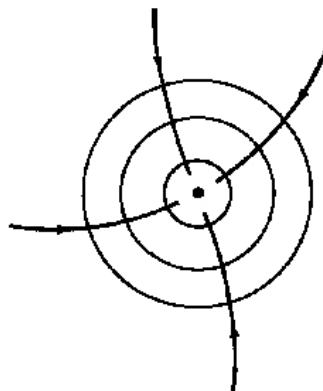
En efecto, como  $\lim_{x \rightarrow 0} R(x)/\|x\| = 0$  y  $Q^{1/2}$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ , existe  $r > 0$  tal que  $\|R(x)\| \leq \frac{1}{4\beta}\|x\|$  si  $Q(x) \leq r$ , y por tanto

$$DQ(x)f(x) = DQ(x)Ax + DQ(x)R(x) = -\|x\|^2 + 2B(x, R(x)) \leq -\|x\|^2 + 2\beta\|x\|\|R(x)\| \leq -\frac{1}{2}\|x\|^2$$

siempre que  $Q(x) \leq r$ .

Fijemos ahora  $x \in B(0, r)$ ,  $x \neq 0$ . Afirmamos que

$$\Phi(t, x) \in \{y \in \mathbb{R}^n : Q(y) \leq Q(x)\} \text{ para todo } t \in I_x. \quad (7.2)$$



En efecto, consideremos ahora la función  $g : [0, \infty) \cap I_x \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(t) = Q(\Phi(t, x)).$$

Se tiene que

$$g'(t) = \frac{d}{dt}Q(\Phi(t, x)) = DQ(\Phi(t, x))\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = DQ(\Phi(t, x))f(\Phi(t, x)), \quad (7.3)$$

y en particular  $g'(0) = DQ(x)f(x) \leq -\|x\|^2/2 < 0$ , luego  $g$  es estrictamente decreciente en un entorno de 0, lo que implica que  $g(t) < g(0) = Q(x)$  en un entorno de 0. Si (7.2) fuera falso entonces, definiendo

$$t_1 = \sup\{t \in (0, \infty) \cap I_x : g(t) < g(0)\},$$

tendríamos que  $t_1 > 0$ ,  $g(t_1) = g(0)$ , y  $g(s) < g(0)$  para todo  $s \in (0, t_1)$ . Entonces por el teorema del valor medio existiría un  $s_1 \in (0, t_1)$  tal que

$$0 = \frac{g(t_1) - g(0)}{t_1} = g'(s_1); \quad (7.4)$$

pero como  $Q(\Phi(s_1, x)) = g(s_1) < g(0) = Q(x) \leq r$ , (7.1) y (7.3) implican que

$$g'(s_1) = DQ(\Phi(s_1, x))f(\Phi(s_1, x)) \leq -\frac{1}{2}\|\Phi(s_1, x)\|^2 \leq -\frac{1}{2\beta}Q(\Phi(s_1, x)) < 0,$$

contradiciendo (7.4). Por tanto (7.2) es cierto, y por el Corolario (3.16) se tiene que  $I_x \cap [0, \infty) = [0, \infty)$ . Además, ahora (7.1), (7.2) y (7.3) implican que

$$g'(t) = DQ(\Phi(t, x))f(\Phi(t, x)) \leq -\frac{1}{2}\|\Phi(t, x)\|^2 \leq -\frac{1}{2\beta}Q(\Phi(t, x)) = -\frac{1}{2\beta}g(t),$$

es decir

$$g'(t) \leq -\frac{1}{2\beta}g(t)$$

para todo  $t \geq 0$ , luego integrando (o usando la desigualdad de Gronwall) obtenemos que

$$g(t) \leq g(0)e^{-\frac{1}{2\beta}t} = Q(x)e^{-\frac{1}{2\beta}t}$$

para todo  $t \geq 0$ , y por consiguiente

$$\|\Phi_x(t) - 0\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}Q(\Phi(t, x)) = \frac{1}{\alpha}g(t) \leq \frac{1}{\alpha}Q(x)e^{-\frac{t}{2\beta}} \leq \frac{\beta}{\alpha}\|x\|^2e^{-\frac{t}{2\beta}},$$

para todo  $t \geq 0$ . Esto prueba (1).

Veamos ahora la demostración de (2). Como antes, podemos suponer  $x_0 = 0$ . Suponiendo que  $A = Df(0)$  tiene algún autovalor con parte real negativa, demostraremos que 0 es un punto de equilibrio inestable de  $x' = f(x)$ .

Descompongamos  $\mathbb{R}^n = E_1 \times E_2$ , donde  $E_1$  es el autoespacio de  $A$  correspondiente a los autovalores con parte real estrictamente positiva, y  $E_2$  el correspondiente a los autovalores con parte real negativa o nula; sabemos que  $A$  lleva  $E_1$  en  $E_1$ , y  $A$  lleva  $E_2$  en  $E_2$ . Definamos  $A_1 = A|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$ , y  $A_2 = A|_{E_2} : E_2 \rightarrow E_2$ , de manera que

$$A(x, y) = (A_1(x), A_2(y))$$

para cada  $(x, y) \in E_1 \times E_2$ . Puesto que todos los autovalores de  $A_1$  tienen parte real estrictamente positiva, existen un número  $a > 0$ , un producto escalar en  $E_1$  y una norma euclídea asociada a este, que seguimos denotando  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $\|\cdot\|$ , tales que

$$\langle A_1x, x \rangle \geq a\|x\|^2 \text{ para todo } x \in E_1$$



(la demostración de esta afirmación se deja como ejercicio para el lector). Análogamente, o bien aplicando lo anterior a  $-A_2 + d\mathbb{I}$ , puesto que todos los autovalores de  $A_2$  tienen parte real menor o igual que cero, dado cualquier número positivo  $d$  tan pequeño como se desee, por ejemplo  $d = a/4$ , existe un producto escalar en  $E_2$  y una norma euclídea asociada a este, que seguimos denotando  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $\| \cdot \|$ , tales que

$$-\langle A_2 y, y \rangle \geq -d\|y\|^2 = -\frac{a}{4}\|y\|^2 \text{ para todo } y \in E_2.$$

A partir de ahora consideramos en  $\mathbb{R}^n = E_1 \times E_2$  el producto escalar definido naturalmente a partir de estos productos escalares en  $E_1$  y  $E_2$ , es decir,

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle,$$

y la norma euclídea asociada a este producto escalar en  $\mathbb{R}^n$  la denotaremos  $\|(x, y)\|$ .

Poniendo  $b = \|A_2\|$ , tenemos

$$|\langle A_2 y, y \rangle| \leq b\|y\|^2.$$

Elijamos ahora un número  $c$  suficientemente grande de forma que

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{c} > 0, \quad c \geq 1,$$

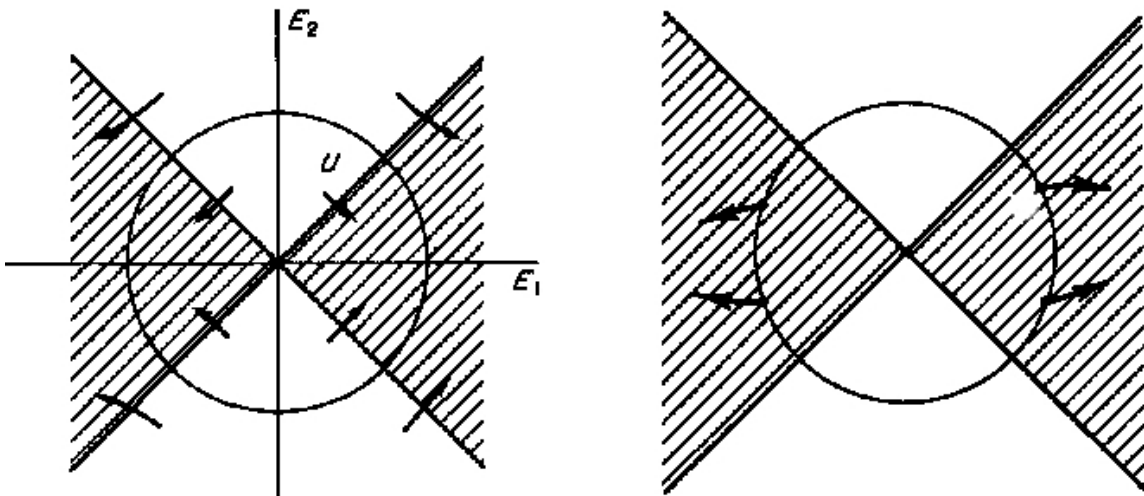
y definamos el cono

$$C = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : \|x\| \geq c\|y\|\}.$$

**Lema 7.3.** *Existen números  $\delta \in (0, \delta_1)$  y  $\alpha > 0$  tal que, si  $U := B(0, \delta)$ , entonces para todo  $(x, y) \in C \cap U$  se tiene que*

1.  $\langle f(x, y), (x, y) \rangle \geq \alpha\|(x, y)\|^2$ .
2.  $\langle (x, -cy), f(x, y) \rangle = \langle x, f_1(x, y) \rangle - c\langle y, f_2(x, y) \rangle > 0$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;

Este lema nos dice, por un lado, que en la parte del borde de la bola  $U$  que está dentro del cono  $C$ , el campo  $f$  apunta hacia afuera de  $U$ , y por otro que en el borde del cono  $C$  que está dentro de la bola  $U$  el campo  $f$  apunta hacia adentro del cono.



Como veremos, esto va a tener como consecuencia que las soluciones que comienzan en  $U \cap C$  necesariamente tienen que salir de  $U$ , lo que implica que  $0$  es un equilibrio inestable.

*Demostración del lema 7.3.* Como  $f$  es de clase  $C^1$  tenemos

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (A_1x + R_1(x, y), A_2y + R_2(x, y)),$$

$$\text{donde } R(x, y) := (R_1(x, y), R_2(x, y)) = o(\|(x, y)\|).$$

Tomando  $\varepsilon$  tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{a}{4},$$

podemos entonces encontrar un número  $\delta > 0$  tal que

$$\|R(x, y)\| \leq \varepsilon\|(x, y)\| \text{ para todo } (x, y) \in B(0, \delta) := U.$$

Si  $(x, y) \in C \cap U$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), (x, y) \rangle &= \langle A_1x, x \rangle + \langle A_2y, y \rangle + \langle R(x, y), (x, y) \rangle \geq \\ a\|x\|^2 - b\|y\|^2 - \varepsilon\|x\|^2 - \varepsilon\|y\|^2 &\geq \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{c}\right)\|x\|^2 + \frac{a}{2}\|x\|^2 - \varepsilon(\|x\|^2 + \|y\|^2) \geq \\ \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{c}\right)\|x\|^2 + \frac{a}{4}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \varepsilon(\|x\|^2 + \|y\|^2) &\geq \\ \left(\frac{a}{4} - \varepsilon\right)(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Poniendo  $\alpha = \frac{a}{4} - \varepsilon$ , esto prueba la primera parte del lema.

Para demostrar la segunda parte, observamos que, para todo  $(x, y) \in C \cap U$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, f_1(x, y) \rangle - c\langle y, f_2(x, y) \rangle &\geq \langle A_1x, x \rangle - c\langle A_2y, y \rangle - \|(x, y)\|\|R(x, y)\| \geq \\ a\|x\|^2 - \frac{ac}{4}\|y\|^2 - \varepsilon\|(x, y)\|^2 &\geq \frac{a}{2}\|x\|^2 + \frac{ac}{2}\|y\|^2 - \frac{ac}{4}\|y\|^2 - \varepsilon\|(x, y)\|^2 \geq \\ \left(\frac{a}{4} - \varepsilon\right)(\|x\|^2 + \|y\|^2) &= \alpha\|(x, y)\|^2, \end{aligned}$$

luego si  $(x, y) \neq (0, 0)$  se tiene  $\langle (x, -cy), f(x, y) \rangle > 0$ . □

Terminemos ahora la demostración del teorema. Afirmamos que *cualquier solución no constantemente 0 que comience en el interior de  $C \cap U$  debe salir de  $U$  en tiempo finito*; es decir, si  $(x_0, y_0) \in \text{int}(C \cap U) \setminus \{(0, 0)\}$  entonces  $\Phi(t, x_0, y_0) \notin U$  para algún  $t > 0$ . Para comprobar esto, denotemos  $\Phi(t, x_0, y_0) = (x(t), y(t))$  y consideremos la función

$$g(t) = \frac{1}{2}(\|x(t)\|^2 - c\|y(t)\|^2).$$

Por tanto, que  $g(t)$  sea mayor que 0 equivale a decir que  $(x(t), y(t))$  está dentro del cono  $C$ , y decir que sea menor que 0 equivale a decir que está fuera de este cono. Cuando  $g(t) = 0$  lo que sucede es que  $(x(t), y(t))$  está en la frontera del cono. Por hipótesis tenemos  $g(0) = \frac{1}{2}(\|x_0\|^2 - c\|y_0\|^2) > 0$ .

En primer lugar, veamos que *no puede suceder que  $(x(t), y(t)) \in C \cap U$  para todo  $t \in I_{(x_0, y_0)}$* : en efecto, como  $C \cap U$  es compacto, por los teoremas de prolongación sabemos que si la solución permanece en este compacto entonces está definida para todo  $t \in [0, \infty)$ . Pero entonces, usando la primera propiedad del lema,

$$\frac{d}{dt}\|(x(t), y(t))\|^2 = 2\langle (x'(t), y'(t)), (x(t), y(t)) \rangle = 2\langle f(x(t), y(t)), (x(t), y(t)) \rangle \geq 2\alpha\|(x(t), y(t))\|^2,$$

Para todo  $t \in [0, \infty)$ , luego

$$\frac{d}{dt} \log \|(x(t), y(t))\|^2 \geq 2\alpha,$$

de donde

$$\|(x(t), y(t))\|^2 \geq e^{2\alpha t} \|(x_0, y_0)\|^2,$$

para todo  $t \in [0, \infty)$ , y esto implica que  $(x(t), y(t))$  debe salirse de la bola cerrada  $U$  para  $t$  suficientemente grande.

Así pues, *debe existir algún  $s > 0$  tal que  $(x(s), y(s))$  no está en  $C \cap U$* . Podemos tomar el ínfimo de tales números  $s$  y llamarlo  $t_1$ , de manera que se tiene que

$$(x(t_1), y(t_1)) \in \partial(C \cap U), \text{ y } (x(t), y(t)) \in \text{int}(C \cap U) \text{ si } t \in [0, t_1). \quad (7.5)$$

Nótese que

$$\partial(C \cap U) \subset ((\partial C) \cap U) \cup ((\partial U) \cap C).$$

Distinguiamos ahora dos casos.

**Caso 1.** Si  $(x(t_1), y(t_1)) \in (\partial U) \cap C$ , entonces usando la primera propiedad del lema se ve como antes que

$$\frac{d}{dt} \|(x(t), y(t))\|^2 \Big|_{t=t_1} \geq 2\alpha \|(x(t_1), y(t_1))\|^2 > 0,$$

lo que implica que existe un  $r > 0$  tal que  $\|(x(t), y(t))\| > \|(x(t_1), y(t_1))\|$  si  $t \in (t_1, t_1 + r)$ , es decir,  $(x(t), y(t))$  debe estar fuera de  $U$  para  $t \in (t_1, t_1 + r)$ . Esto muestra que las soluciones que tocan  $(\partial U) \cap C$  deben salir de  $U$ .

**Caso 2.** Por otro lado, si  $(x(t_1), y(t_1)) \in (\partial C) \cap U$ , entonces, usando la segunda propiedad del lema anterior (y observando que  $(x(t_1), y(t_1)) \neq (0, 0)$  porque  $(x(t), y(t))$  no puede cortar al punto de equilibrio) tenemos que

$$\begin{aligned} g'(t_1) &= \langle x'(t_1), x(t_1) \rangle - c \langle y'(t_1), y(t_1) \rangle = \\ &= \langle f_1(x(t_1), y(t_1)), x(t_1) \rangle - c \langle f_2(x(t_1), y(t_1)), y(t_1) \rangle > 0. \end{aligned}$$

Pero esto es imposible, porque (7.5) implica que  $g(t) > g(t_1) = 0$  para  $t \in [0, t_1)$ , luego

$$g'(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{g(t) - g(t_1)}{t - t_1} \leq 0.$$

Así pues, necesariamente se da siempre el primer caso, es decir,  $(x(t_1), y(t_1)) \in (\partial U) \cap C$ , y ya sabemos que entonces  $(x(t), y(t))$  sale de  $U$  después de  $t = t_1$ . Por tanto, existe un entorno  $\text{int}(U)$  de 0 tal que para todo entorno  $V$  de 0 existen puntos  $(x_0, y_0) \in V \cap \text{int}(C \cap U)$  tales que  $\Phi(t, x_0, y_0)$  sale de  $U$  para algún  $t > 0$ . Esto implica que 0 no es estable.  $\square$

**Definición 7.2.** Si  $x_0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de un sistema  $x' = f(x)$ , donde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial completo de clase  $C^1$ , se llama *cuenca de atracción* de  $x_0$ , y se denota  $B(x_0)$ , a la union de todas las curvas solución de  $x' = f(x)$  que tienden a  $x_0$  en tiempo infinito. Dicho de otra forma,

$$B(x_0) = \{x \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = x_0\}.$$

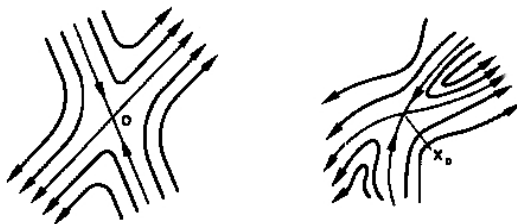
En la práctica es importante saber estimar la cuenca de atracción de un sumidero  $x_0$ , porque el tamaño de esta cuenca de atracción nos dice cuánto podemos perturbar un equilibrio y seguir estando seguros de que el sistema retornará al estado de equilibrio.

Cuando  $x' = f(x)$  describe un sistema físico, prácticamente se pueden identificar los estados de  $B(x_0)$  con  $x_0$ , puesto que después de un período de transición, estarán tan cerca de  $x_0$  como para no poder distinguirse de  $x_0$ . En el caso de los sistemas gradientes, que estudiaremos más adelante, casi todos los estados iniciales están en la cuenca de atracción de algún sumidero, y los que no están son *improbables* (forman un conjunto de medida cero).

**Observación 7.4.** La demostración de la primera parte del teorema anterior proporciona una estimación de la cuenca de atracción de  $x_0$ . La función  $Q$  construida en la prueba de (1) es una *función de Liapunov estricta*. En el próximo capítulo veremos que la existencia de funciones de Liapunov (estrictas) en un entorno de un punto de equilibrio  $x_0$  implica la estabilidad (asintótica) de  $x_0$ .

El teorema anterior es también consecuencia de un resultado mucho más fuerte que nos asegura que de hecho, bajo las condiciones del teorema, el flujo de  $f$  es localmente topológicamente conjugado (en un entorno del punto de equilibrio  $x_0$ ) al flujo de su parte lineal  $A = Df(x_0)$ .

**Teorema 7.5** (Grobman-Hartman). *Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ , y sea  $x_0$  un punto de equilibrio. Supongamos que  $A = Df(x_0)$  es un operador hiperbólico (i.e. todos sus autovalores tienen parte real no nula). Entonces existen  $V, U$  entornos abiertos de  $x_0$  y de 0 respectivamente tales que los campos  $f|_V$  y  $A|_U$  son topológicamente conjugados (i.e. existe un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $\varphi \circ e^{tA} = \Phi_t \circ \varphi$ ).*

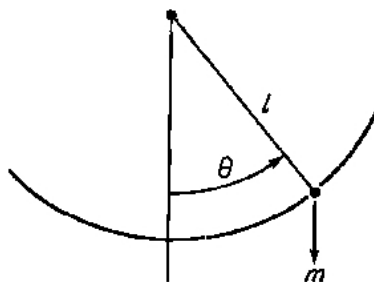


Omitiremos la demostración de este teorema, que es algo difícil, aunque no inaccesible para un alumno suficientemente motivado de este curso: en este caso recomendamos estudiarla por el libro de Amann [1, p. 254-264].

### 7.3. Ejemplo: el péndulo con rozamiento

Consideremos un péndulo que se mueve en un plano vertical sometido a una fuerza gravitacional constante igual a la masa  $m$  del peso del péndulo. Despreciamos la masa de la vara rígida que soporta el peso del péndulo y asumimos que hay una fuerza de fricción que se opone al movimiento, proporcional a la velocidad del peso. Denotemos por  $\ell$  la longitud del hilo. El peso del péndulo puede moverse entonces dentro de una circunferencia de radio  $\ell$ ; podemos entonces denotar por  $\theta(t)$  el ángulo (en la dirección contraria a las agujas del reloj) que forman la vertical y el segmento formado por el peso y el otro extremo fijo del hilo.

La velocidad angular del péndulo es  $d\theta/dt$ , y la velocidad es  $\ell d\theta/dt$ ; por tanto la intensidad de la fuerza de rozamiento es  $-k\ell d\theta/dt$ , donde  $k > 0$  es una constante, y esta fuerza es tangente a la circunferencia en  $\theta(t)$ . La componente tangencial a la circunferencia de la fuerza gravitatoria vertical tiene intensidad  $-m \text{sen } \theta(t)$ ; esta es la fuerza que produce el movimiento del péndulo y a la que se opone la del rozamiento.



Por tanto la fuerza total tangente a la circunferencia en tiempo  $t$  es

$$F = - \left( k\ell \frac{d\theta}{dt} + m \text{sen } \theta \right).$$

La componente tangencial a la circunferencia de la aceleración producida en el peso por esta fuerza es

$$a = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

luego por la segunda ley de Newton tendremos

$$\ell\theta''(t) = -\frac{k\ell}{m}\theta'(t) - \text{sen } \theta(t).$$

Introduciendo la variable

$$\omega(t) = \theta'(t),$$

que llamamos velocidad angular del péndulo, tenemos entonces el sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{1}{\ell} \text{sen } \theta(t) - \frac{k}{m} \omega(t), \end{cases} \quad (7.6)$$

que también puede escribirse en la forma  $(\theta', \omega') = f(\theta, \omega)$ , donde

$$f(\theta, \omega) = \left( \omega, -\frac{1}{\ell} \text{sen } \theta - \frac{k}{m} \omega \right).$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son  $(n\pi, 0)$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , que corresponden a la posición más baja posible del peso (para  $n$  par) y a la más alta posible (para  $n$  impar). Centrémonos en el punto de equilibrio  $(0, 0)$ . Tenemos que

$$Df(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\ell} \cos \theta & -\frac{k}{m} \end{pmatrix},$$

luego

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{k}{m} \pm \left( \frac{k^2}{m^2} - \frac{4}{\ell} \right)^{1/2} \right).$$

Podemos suponer que  $0 < k < m$ , y entonces la parte real de estos autovalores es negativa. Por tanto, por Teorema 7.2,  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Esto significa que para todos los pares de posiciones y velocidades iniciales suficientemente pequeños, el péndulo tiende a quedarse quieto en la posición más baja posible.

Un análisis similar muestra que el punto de equilibrio  $(\pi, 0)$  (que corresponde a la posición más alta posible del péndulo) es inestable: pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales alejarán a la solución de este equilibrio.

## 7.4. Variedades estable e inestable

**Definición 7.3.** Sean  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^k$ , y  $x_0$  un punto de equilibrio de  $f$ . Definimos el *conjunto estable* del sistema  $x' = f(x)$  respecto del punto de equilibrio  $x_0$  como

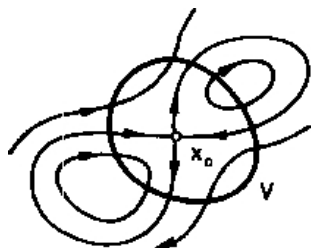
$$W_s(x_0) := \{x \in \Omega : \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = x_0\},$$

y el *conjunto inestable* de  $x' = f(x)$  como

$$W_u(x_0) := \{x \in \Omega : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, x) = x_0\}.$$

Por ejemplo, si  $f = A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  es hiperbólico, ya sabemos que  $W_s(0)$  coincide con el autoespacio de  $A$  correspondiente a autovalores con parte real negativa, y  $W_u(0)$  coincide con el autoespacio correspondiente a los autovalores con parte real positiva.

No es cierto en general que cuando el sistema  $x' = f(x)$  es no lineal, si  $A = Df(x_0)$  es hiperbólico entonces exista un entorno  $V$  de  $x_0$  tal que  $W_s(x_0) \cap V$  y  $W_u(x_0) \cap V$  sean variedades diferenciables; ver la figura.



Sin embargo, podemos dar versiones *locales* de  $W_s(x_0)$  y  $W_u(x_0)$  para las que esto sí es cierto.

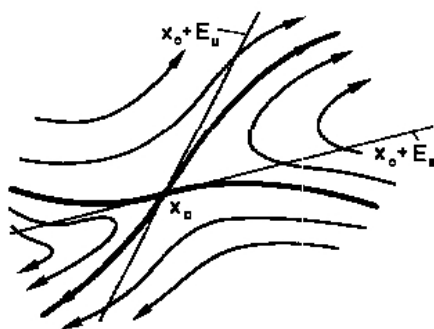
**Definición 7.4.** Sean  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^k$ ,  $x_0$  un punto de equilibrio de  $f$ , y  $V$  un entorno abierto de  $x_0$ . Definimos el *conjunto estable* del sistema  $x' = f(x)$  respecto del punto de equilibrio  $x_0$  y el abierto  $V$  como

$$W_s(x_0, V) := \{x \in \Omega : \Phi(t, x) \in V \text{ para todo } t \geq 0, \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = x_0\},$$

y el *conjunto inestable* de  $x' = f(x)$  respecto de  $x_0$  y  $V$  como

$$W_u(x_0, V) := \{x \in \Omega : \Phi(t, x) \in V \text{ para todo } t \geq 0, \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, x) = x_0\}.$$

**Teorema 7.6** (Hadamard-Perron). *Supongamos que  $x_0$  es un punto de equilibrio de un campo  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , y que  $Df(x_0)$  es un operador hiperbólico (i.e. todos sus autovalores tienen parte real no nula). Entonces existe un entorno abierto  $V$  de  $x_0$  tal que  $W_s(x_0, V)$  y  $W_u(x_0, V)$  son subvariedades diferenciables de clase  $C^k$  de  $\Omega$ , y sus espacios tangentes en  $x_0$  son  $E_s$  y  $E_u$  respectivamente.*



En particular  $W_s$  tiene dimensión igual al número de autovalores de  $Df(x_0)$  con parte real negativa, y la dimensión de  $W_u$  es igual al número de autovalores de  $Df(x_0)$  con parte real positiva (en ambos casos contados con su multiplicidad).

La demostración del teorema anterior es algo técnica y la omitiremos en este curso, ya que no vamos a usar este resultado en ninguna otra prueba. Puede consultarse por ejemplo en [1, p. 269-275] o en [10, p. 257-261].

## 7.5. Problemas

**Problema 7.1.** Probar que un punto de equilibrio  $x_0$  de un sistema  $x' = f(x)$  es estable si y sólo si para toda sucesión  $(x_k)$  que converja a  $x_0$  se tenga que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t, x_k) = \Phi(t, x_0)$  uniformemente en  $t \in [0, +\infty)$ .

**Problema 7.2.** Demostrar la Proposición 7.1.

**Problema 7.3.** En los sistemas siguientes, comprobar que el origen es un punto de equilibrio y estudiar su estabilidad:

$$\begin{cases} x' = x - y + xy \\ y' = 3x - 2y - xy \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + x^2 + y^2 \\ y' = y - xy \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -2x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

**Problema 7.4.** En los sistemas siguientes, comprobar que el origen es un punto de equilibrio y estudiar su estabilidad:

$$\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu(1 - x^2)y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x(1 - y - \mu x) \\ y' = -y(1 - x + \mu y), \end{cases}$$

donde  $\mu \geq 0$ .

**Problema 7.5.** En los sistemas siguientes, comprobar que el origen es un punto de equilibrio y estudiar su estabilidad:

$$\begin{cases} x' = -x + y^2 + z^2 \\ y' = -x - y + z^2 \\ z' = -x - y - z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y - z \\ y' = e^x - 1 \\ z' = -z + 2(e^x - 1). \end{cases}$$

**Problema 7.6.** En los sistemas siguientes, hallar todos los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad:

$$\begin{cases} x' = x + y^2 \\ y' = x + y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = x - y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - x^2 - xy \\ y' = 3y - xy - 2y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

**Problema 7.7.** En los sistemas siguientes, hallar todos los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad:

1.  $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$
2.  $x'' + x' + \sin x = 0$
3.  $x'' + 2x' + x = x^3$
4.  $x'' + ax' + \sin x = x^3$ .

**Problema 7.8.** Demostrar que si  $x_0$  es un surtidor no lineal de un sistema autónomo  $x' = f(x)$  entonces existe un entorno  $U$  de  $x_0$  tal que toda solución de este sistema que comienza dentro de  $U \setminus \{0\}$  sale de  $U$  en tiempo finito, y nunca vuelve a entrar en  $U$ .

*Indicación:* Usar las ideas de la demostración de la segunda parte del Teorema 7.2, con otro conjunto  $C$  y otra función  $g$ .

**Problema 7.9.** Demostrar que la cuenca de atracción  $B(x_0)$  de un punto de equilibrio asintóticamente estable  $x_0$  de un sistema  $x' = f(x)$  es un conjunto abierto

**Problema 7.10.** Sea  $x_0$  un punto de equilibrio estable de un campo vectorial  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$ . Demostrar que para todo entorno abierto  $U$  de  $x_0$  en  $\Omega$  existe otro entorno  $V$  de  $x_0$  en  $U$  tal que para todo  $x \in V$  se tiene  $\Phi(t, x) \in V$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . Además, si  $x_0$  es asintóticamente estable, demostrar que podemos elegir el entorno  $V$  con la propiedad de que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = x_0$  para todo  $x \in V$ .

*Indicación:* considerar el conjunto de puntos de  $U$  cuyas órbitas positivas entran en  $B(x_0, \delta)$  de la definición 7.1.

**Problema 7.11.** Demostrar que el sistema en  $\mathbb{R}^2$  cuyas ecuaciones en coordenadas polares son

$$\theta' = 1, r' = \begin{cases} r^2 \operatorname{sen}(1/r) & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0, \end{cases}$$

tiene un punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable. Dibujar el diagrama de fases.

**Problema 7.12.** Sean  $x_0$  e  $y_0$  puntos de equilibrio de  $x' = f(x)$  y de  $y' = g(y)$  respectivamente, y supongamos que  $Df(x_0)$  y  $Dg(y_0)$  son hiperbólicos. Probar que  $f$  y  $g$  son localmente topológicamente conjugados en entornos de  $x_0$  e  $y_0$  si y sólo si las dimensiones de sus variedades estables coinciden.

**Problema 7.13.** Demostrar que si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real estrictamente positiva, entonces existen un número  $a > 0$  y un producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ , que seguimos denotando  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , con norma asociada denotada por  $\| \cdot \|$ , tales que  $\langle Ax, x \rangle \geq a \|x\|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Problema 7.14.** Deducir el principio de linealización como corolario del teorema de Grobman-Hartman.

**Problema 7.15.** Dar un ejemplo que muestre que el teorema de Grobman-Hartman falla si no se exige que  $A = Df(x_0)$  sea hiperbólico.

**Problema 7.16.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial  $C^1$ , y supongamos que  $f(0) = 0$ . Probar que si algún autovalor de  $Df(0)$  tiene parte real positiva, entonces existe una solución  $x(t)$ ,  $-\infty < t \leq 0$  de  $x' = f(x)$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ .

*Indicación:* usar la segunda parte del principio de linealización para encontrar un número  $\delta > 0$  y una sucesión de soluciones  $x_n(t)$ ,  $t_n \leq t \leq 0$  en  $B(0, \delta)$  tales que  $\|x_n(0)\| = \delta$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t_n) = 0$ .

**Problema 7.17.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial  $C^1$ , y supongamos que  $f(0) = 0$ . Demostrar que si algún autovalor de  $Df(0)$  tiene parte real negativa, entonces existe una solución  $y(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , de  $x' = f(x)$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

*Indicación:* usar el problema anterior.



## Capítulo 8

# Estabilidad por el método de Liapunov. Conjuntos límite

Cuando el principio de linealización no puede aplicarse a un sistema no lineal  $x' = f(x)$  en un punto de equilibrio  $x_0$  porque  $Df(x_0)$  tiene autovalores con parte real nula hay que buscar otros métodos para estudiar la posible estabilidad o estabilidad asintótica de  $x_0$ . Uno de los más útiles es el *método directo de Liapunov*, que consiste en encontrar funciones  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tales que el campo  $f$  apunta hacia dentro de sus conjuntos de nivel en un entorno de  $x_0$ , y estos conjuntos de nivel engloban a  $x_0$  y se colapsan en  $x_0$  al acercarse a este punto. En la primera sección exponemos los teoremas de estabilidad de Liapunov. Las técnicas de Liapunov tienen también relación con las nociones de conjuntos positivamente (o negativamente) invariantes, y los llamados conjuntos omega-límites, que estudiamos en la segunda sección del capítulo, y pueden incluso aplicarse para estudiar la estabilidad de otro tipo de conjuntos invariantes (por ejemplo órbitas cerradas), como veremos en la tercera sección.

### 8.1. Teoremas de estabilidad de Liapunov

En el capítulo anterior hemos visto que si un sistema  $x' = f(x)$  tiene un punto de equilibrio  $x_0$  tal que los autovalores de su parte lineal  $Df(x_0)$  tienen todas partes reales negativas, entonces  $x_0$  es un equilibrio asintóticamente estable. En la demostración resulta fundamental construir una norma equivalente  $Q^{1/2}$  con la propiedad de que la función

$$t \rightarrow Q(\Phi(t, x))$$

es decreciente. A.M. Liapunov vio que otras funciones (no necesariamente cuadrados de normas equivalentes) pueden usarse en lugar de  $Q$  para demostrar la estabilidad de un sistema cuya parte lineal no necesariamente es un operador hiperbólico, y por supuesto sin tener que calcular todas las soluciones de  $x' = f(x)$ , lo que en general es imposible.

**Teorema 8.1** (de estabilidad de Liapunov). *Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de un campo  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Supongamos que existe una función continua  $V : U \rightarrow [0, +\infty)$  definida en un entorno  $U$  de  $x_0$ , que  $V$  es diferenciable en  $U \setminus \{x_0\}$ , y que*

1.  $V(x) = 0 \iff x = x_0$
2.  $DV(x)f(x) \leq 0$  para todo  $x \in U \setminus \{x_0\}$

*Entonces  $x_0$  es estable. Además, si la desigualdad de (2) es estricta, entonces  $x_0$  es asintóticamente estable.*

Nótese que si  $V$  cumple (2) entonces  $V$  decrece a lo largo de las curvas integrales de  $x' = f(x)$  contenidas en  $U \setminus \{x_0\}$ ; en efecto, se tiene

$$\frac{d}{dt}V(\Phi(t, x)) = DV(\Phi(t, x))\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = DV(\Phi(t, x))f(\Phi(t, x)) \leq 0.$$

A una función  $V$  que satisfaga las condiciones (1) y (2) del enunciado del teorema se le llama *función de Liapunov de estabilidad* para el campo  $f$  en un entorno de  $x_0$ . Si además la desigualdad de (2) es estricta, a  $V$  se le llama *función de Liapunov de estabilidad asintótica* para  $f$ . En general no hay un método universal para construir funciones de Liapunov; cada caso puede ser diferente y requerir una dosis considerable de ingenio y ensayo y error.<sup>1</sup> En el caso particular de sistemas mecánicos y eléctricos, la energía suele ser una función de Liapunov. Por otro lado, en muchos de los problemas al final del capítulo pueden considerarse funciones de Liapunov que son polinomios de grado 2 en varias variables, y utilizar la condición  $DV(x)f(x) \leq 0$  para hallar los coeficientes de estos polinomios.

*Demostración del Teorema 8.1.* Sea  $\delta > 0$  tal que  $B(x_0, \delta) \subset U$ , y denotemos

$$\alpha := \min_{\|x-x_0\|=\delta} V(x),$$

que es estrictamente positivo gracias a la compacidad de  $\partial B(x_0, \delta)$ , la continuidad de  $V$ , y la condición (1) del enunciado. Definamos

$$U_1 := \{x \in B(x_0, \delta) : V(x) < \alpha\},$$

y para cada  $x \in U_1$  consideremos la función  $g(t) = g_x(t)$  definida por

$$g(t) = V(\Phi(t, x)).$$

Puesto que (por la condición (2) del enunciado)  $g_x$  es decreciente, ninguna solución que comience en  $U_1$  puede cortar la esfera  $\partial B(x_0, \delta)$  (en efecto, si para algún  $x \in U_1$  y  $t_1$  se tuviera  $\|\Phi(t_1, x) - x_0\| = \delta$  entonces podemos suponer, tomando el ínfimo de tales  $t_1$ , que  $\Phi(t, x) \in B(x_0, \delta)$  para todo  $t \in [0, t_1]$ , y entonces, por definición de  $\alpha$  y de  $U_1$ ,  $g(t_1) = V(\Phi(t_1, x)) \geq \alpha > g(0)$ , con lo que  $g$  no sería decreciente). Por tanto toda solución que comienza en  $U_1$  nunca abandona  $B(x_0, \delta)$ . Como este conjunto es compacto, los teoremas de prolongación del Capítulo 3 muestran que  $\Phi(t, x)$  tiene que estar definido para todo  $t \in [0, \infty)$ . Y como  $\delta > 0$  puede tomarse arbitrariamente pequeño, este argumento prueba que  $x_0$  es un equilibrio estable.



Supongamos ahora que la desigualdad de (2) es estricta. Esto quiere decir que  $g_x(t)$  es estrictamente decreciente (en los intervalos en que  $\Phi(t, x) \in U \setminus \{x_0\}$ ). Veamos que entonces  $x_0$  es asintóticamente estable. Como ya sabemos que es estable, sólo hay que ver que existe un entorno  $W$  de  $x_0$  tal que para todo  $x \in W$  se tiene  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = x_0$ . De hecho vamos a probar que podemos tomar  $W = U_1$ , es decir que para todo  $x \in U_1 \setminus \{x_0\}$  se tiene  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = x_0$ . En efecto, de lo contrario existirían un número  $\varepsilon > 0$  y una sucesión  $t_k \nearrow \infty$  tales que

$$\|\Phi(t_k, x) - x_0\| \geq \varepsilon$$

<sup>1</sup>Sin embargo, y a pesar de que en muchos casos puede ser muy difícil encontrarlas, puede demostrarse que las funciones de Liapunov siempre existen; es decir, si  $x_0$  es un punto de equilibrio estable de  $x' = f(x)$ , existe una función de Liapunov de estabilidad para  $f$  en un entorno de  $x_0$ , y similarmente para la estabilidad asintótica. Ver por ejemplo los libros [9, 11].

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Puesto que ya sabemos que  $x_k := \Phi(t_k, x) \in B(x_0, \delta)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $B(x_0, \delta)$  es compacto, podemos suponer, pasando a una subsucesión de  $(t_k)$  si fuera necesario, que  $(x_k)$  converge a un punto  $z_0 \in B(x_0, \delta)$ . Necesariamente se tiene

$$\|z_0 - x_0\| \geq \varepsilon,$$

y en particular  $z_0 \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ . Además, al ser decreciente la función  $g_x(t)$  y estar acotada inferiormente, existe el límite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g_x(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} V(\Phi(s, x)).$$

Por la continuidad del flujo tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t, x_k) = \Phi(t, z_0),$$

y al ser  $V$  decreciente sobre las órbitas contenidas en  $U \setminus \{x_0\}$  y ser  $z_0 \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \subset U \setminus \{x_0\}$ , para  $t > 0$  tenemos

$$V(\Phi(t, z_0)) < V(\Phi(0, z_0)) = V(z_0).$$

Pero por otro lado, usando la continuidad de  $\Phi$  y de  $V$ , y la existencia del límite de  $g_x$  en  $\infty$ , tenemos

$$\begin{aligned} V(z_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(t_k, x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_x(t_k) = \lim_{s \rightarrow \infty} g_x(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_x(t_k + t) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(t_k + t, x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(t, x_k)) = V(\Phi(t, z_0)), \end{aligned}$$

lo que contradice la desigualdad anterior.  $\square$

Las funciones de Liapunov son muy útiles no sólo porque nos permiten demostrar la estabilidad de un punto de equilibrio, sino porque también nos permiten estimar la cuenca de atracción de un punto de equilibrio asintóticamente estable, como vemos en el siguiente teorema, que generaliza el anterior.

**Definición 8.1.** Se dice que un conjunto  $P \subseteq \Omega$  es *positivamente invariante* (por el flujo  $\Phi$  de un campo  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$ ) si para cada  $x \in P$  se eneti  $\mathcal{O}_x^+ := \{\Phi(t, x) : t \geq 0\} \subseteq P$ . Análogamente, si para cada  $y \in D$  se tiene que  $\mathcal{O}_x^- := \{\Phi(t, x) : t \leq 0\} \subseteq D$ , se dice que  $D$  es *negativamente invariante*. Cuando un conjunto  $E$  es a la vez positivamente invariante y negativamente invariante, se dice que  $E$  es *invariante*.

**Teorema 8.2** (Principio de invariancia de Krasovskii-LaSalle). *Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de un campo  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Supongamos que existe una función continua  $V : U \rightarrow [0, +\infty)$  definida en un entorno  $U$  de  $x_0$ , que  $V$  es diferenciable en  $U \setminus \{x_0\}$ , y que*

1.  $V(x) = 0 \iff x = x_0$
2.  $DV(x)f(x) \leq 0$  para todo  $x \in U \setminus \{x_0\}$

*Sea  $P \subseteq U$  un entorno compacto de  $x_0$ , y supongamos que  $P$  es positivamente invariante y que para cualquier órbita  $\mathcal{O}_x$  que esté enteramente contenida en  $P \setminus \{x_0\}$  se tiene que  $V$  no es constante sobre  $\mathcal{O}_x$ . Entonces  $x_0$  es asintóticamente estable, y además*

$$P \subseteq B(x_0),$$

*es decir, la cuenca de atracción de  $x_0$  contiene a  $P$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 8.1 ya sabemos que  $x_0$  es estable. Sólo tenemos que probar que es asintóticamente estable y que de hecho su cuenca de atracción  $B(x_0)$  contiene a  $P$ . Sea  $x \in P$ . Como  $P$  es compacto y positivamente invariante, por el Corolario 3.21 sabemos que  $\phi(t, x)$  está definida para todo  $t \in [0, \infty)$ .

Supongamos que  $\Phi(t, x)$  no tiende a  $x_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces, por compacidad de  $P$ , existe un punto  $z_0 \in P \setminus \{x_0\}$  y una sucesión  $t_k \nearrow \infty$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x) = z_0.$$

Como la función  $g_x(t) = V(\Phi(t, x))$  es decreciente, existe

$$\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} g_x(t) = \inf\{V(\Phi(t, x)) : t \geq 0\}.$$

Definamos

$$\omega(x) = \{z \in \Omega : \text{existe una sucesión } (t_k) \nearrow \infty \text{ tal que } z = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x) = z\}$$

(como veremos después, a este conjunto se le llama el omega-límite de  $x$ ). Así pues  $z_0 \in \omega(x)$ , y en particular  $\omega(x) \neq \emptyset$ . Como  $P$  es cerrado, se tiene también que  $\omega(x) \subseteq P$ .

Afirmamos que si  $z \in \omega(x)$  entonces  $\Phi(t, z)$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y  $\mathcal{O}_z \subseteq \omega(x)$ . En efecto, por un lado ya sabemos que  $\Phi(t, z)$  está definida y dentro de  $P$  para todo  $t \in [0, \infty)$  (ya que  $\omega(x) \subseteq P$  y  $P$  es compacto y positivamente invariante). Por otro lado, si  $(t_k)$  es una sucesión creciente que tiende a infinito para la cual se tiene  $z = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x)$ , entonces, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi(t, \Phi(t_k, x))$  está definida, y dentro de  $P$ , en  $[-t_k, 0]$ . Puesto que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x) = z$  y  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , el Teorema 3.22 implica que  $\Phi(t, z)$  está definida en  $[-t_k, 0]$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , y puesto que  $\lim_{k \rightarrow \infty} -t_k = -\infty$  se concluye que  $\Phi(t, z)$  está definida en  $(-\infty, 0]$ . Por tanto  $\Phi(t, z)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Además, si  $t \in \mathbb{R}$ , entonces para  $k$  suficientemente grande  $\Phi(t, \Phi(t_k, x)) = \Phi(t_k + t, x)$ , y como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t, \Phi(t_k, z)) = \Phi(t, z)$ , se deduce que  $\Phi(t, z) \in \omega(x)$ ; es decir,  $\omega(x)$  es invariante.

Ahora bien, para cada  $z \in \omega(x)$  se tiene, para alguna sucesión  $t_k \nearrow \infty$ ,

$$V(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(t_k, x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_x(t_k) = \beta.$$

Es decir,  $V$  es constante sobre  $\omega(x)$ , y como ya sabemos que  $\mathcal{O}_{z_0} \subseteq \omega(x)$ , en particular  $V$  es constante sobre  $\mathcal{O}_{z_0}$ , lo que contradice la hipótesis sobre  $V$  puesto que  $\mathcal{O}_{z_0} \neq \{x_0\}$ .  $\square$

**Observación 8.3.** Si existe una función de Liapunov de estabilidad asintótica  $V : U \rightarrow [0, \infty)$  para  $f$  en  $x_0$  entonces evidentemente se cumplen las condiciones del teorema anterior para cualquier compacto positivamente invariante contenido en  $U$ , y por tanto resulta que  $P$  está contenido en  $B(x_0)$ .

**Ejemplo 8.1.1.** Veamos qué conclusiones podemos sacar al aplicar el teorema anterior al sistema del péndulo con rozamiento (estudiado en la sección 3 del capítulo anterior). Una técnica habitual con los sistemas físicos es tratar de ver que la energía es una función de Liapunov. En este caso, como el péndulo tiene rozamiento, la energía (entendida como suma de la energía cinética más la energía potencial) no cabe esperar que se conserve, sino que decrezca con el tiempo.

La energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

La energía potencial es (salvo constante) la masa por la altura relativa,

$$E_p = m(\ell - \ell \cos \theta).$$

Por tanto la energía total es

$$E = m\ell \left( \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + 1 - \cos \theta \right),$$

y entonces

$$\frac{d}{dt}E(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = m\ell(\dot{\theta}'(t)\dot{\theta}(t) + \theta'(t) \sin \theta),$$

que usando las ecuaciones (7.6) se puede simplificar en

$$\frac{d}{dt}E(\theta(t), \omega(t)) = -k\ell^2\omega(t)^2 \leq 0,$$

y por tanto efectivamente  $E(\theta, \omega)$  es una función de Liapunov (nótese que también se tiene  $E(0, 0) < E(\theta, \omega)$  para  $(\theta, \omega)$  en un entorno de  $(0, 0)$ ). Para estimar la cuenca de atracción de  $(0, 0)$ , fijemos números  $c \in (0, 2m\ell)$  y  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño para que  $m\ell(1 - \cos(\pi - \varepsilon)) > c$ , y definamos

$$P_{c,\varepsilon} = \{(\theta, \omega) : E(\theta, \omega) \leq c, |\theta| \leq \pi - \varepsilon\}.$$

Es claro que  $P_{c,\varepsilon}$  es un entorno compacto de  $(0, 0)$ . Usando el Teorema 8.2 vamos a ver que  $P_{c,\varepsilon}$  está contenido en la cuenca de atracción de  $(0, 0)$ . En primer lugar,  $P_{c,\varepsilon}$  es positivamente invariante: si  $(\theta(t), \omega(t))$  es una solución que comienza en  $P_{c,\varepsilon}$ , como la energía decrece a lo largo de esta curva, tendremos  $E(\theta(t), \omega(t)) \leq c$  para todo  $t > 0$ ; por otro lado, si  $|\theta(t)| > \pi - \varepsilon$ , existirá un  $t_0 \in [0, t]$  tal que  $|\theta(t_0)| = \pi - \varepsilon$ , y entonces

$$E(\theta(t_0), \omega(t_0)) = m\ell \left( \frac{1}{2}\ell\omega(t_0)^2 + 1 - \cos(\pi - \varepsilon) \right) \geq m\ell(1 - \cos(\pi - \varepsilon)) > c \geq E(\theta(t_0), \omega(t_0)),$$

lo cual es absurdo. Por tanto  $\theta(t) \leq \pi - \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Obsérvese también que al ser  $P_r$  compacto, por los resultados de prolongación del Capítulo 3 sabemos que las soluciones que permanecen en  $P_r$  para tiempos positivos deben estar de hecho definidas en  $[0, \infty)$ . Por tanto  $P_{c,\varepsilon}$  es positivamente invariante. En segundo lugar, si  $E$  es constante en una trayectoria  $(\theta(t), \omega(t))$ , entonces

$$-k\ell^2\omega(t)^2 = \frac{d}{dt}E(\theta(t), \omega(t)) = 0,$$

luego  $\omega(t) = 0$  para todo  $t$ . Las ecuaciones (7.6) implican entonces que  $\theta'(t) = 0$  y  $\sin \theta(t) = 0$  para todo  $t$ , luego  $\theta(t) = \theta(0)$  es constante, y además como  $|\theta(0)| < \pi$  y  $\sin \theta(0) = 0$  se deduce que  $\theta(t) = \theta(0) = 0$ . Así que la única órbita contenida en  $P_{c,\varepsilon}$  sobre la cual  $E$  puede ser constante es el punto de equilibrio  $(0, 0)$ .

Aplicando entonces el Teorema 8.2 obtenemos que  $P_{c,\varepsilon} \subseteq B(0, 0)$  para todos esos números  $c, \varepsilon$ , lo que implica que

$$P := \{(\theta, \omega) : E(\theta, \omega) < 2m\ell, |\theta| < \pi\} = \bigcup_{c,\varepsilon} P_{c,\varepsilon} \subseteq B(0, 0).$$

Interpretemos este resultado desde un punto de vista físico:  $2m\ell$  es la energía total del estado  $(\pi, 0)$ , que corresponde al equilibrio inestable en que el peso del péndulo está en el punto más alto posible, sostenido por la vara. Entonces, si el péndulo no está en este punto más alto posible y la energía total es menos que la energía total del estado  $(\pi, 0)$ , el péndulo tendrá que caer e irse aproximando, oscilación tras oscilación, al punto más bajo posible, el equilibrio  $(0, 0)$ . También es interesante observar que hay otros estados en la cuenca de atracción del equilibrio  $(0, 0)$  que no están en el conjunto  $P$ ; por ejemplo, el estado  $(\pi, u)$ , con  $u$  muy pequeño pero no nulo, no está en  $P$ , pero el péndulo se mueve en corto tiempo a un estado que sí está en  $P$ , y por tanto  $(\pi, u) \in B(0, 0)$ .

Terminamos esta sección con una condición suficiente de inestabilidad.

**Teorema 8.4** (de inestabilidad). Sean  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $x_0$  un punto de equilibrio de  $f$ , y  $U$  un entorno abierto de  $x_0$ . Supongamos que existe una función continua  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$ , que es de clase  $C^1$  en  $U \setminus \{x_0\}$  y que

1.  $W(x_0) = 0$ .
2. Existe una sucesión  $x_k \rightarrow x_0$  tal que  $W(x_k) > 0$  para todo  $k$ .

3.  $DW(x)f(x) > 0$  para todo  $x \in U \setminus \{x_0\}$ .

Entonces  $x_0$  es un equilibrio inestable.

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$  con  $B(x_0, \varepsilon) \subseteq U$ , para todo  $\delta \in (0, \varepsilon)$  existe  $x = x_\delta \in B(x_0, \delta)$  con  $V(x) > 0$ . Probaremos que no es cierto que  $\Phi(t, x) \in B(x_0, \varepsilon)$  para todo  $t \geq 0$ . Supongamos que sí lo fuera. Por continuidad de  $W$ , y puesto que  $W(x_0) = 0$ , existe  $r > 0$  tal que  $W(y) < W(x)$  para todo  $y \in B(x_0, r)$ . Consideremos la función

$$g(t) = W(\Phi(t, x)).$$

Entonces  $g$  es estrictamente creciente en  $[0, +\infty)$ , y por tanto

$$r \leq \|\Phi(t, x) - x_0\| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \in [0, \infty) \quad (8.1)$$

(de lo contrario  $W(\Phi(t, x)) < W(x)$  para algún  $t > 0$ , y  $g$  no sería creciente). Definamos

$$\alpha := \min\{DW(y)f(y) : r \leq \|y - x_0\| \leq \varepsilon\},$$

que es estrictamente positivo gracias a la compacidad del conjunto que aparece en la definición, la continuidad de  $DW$  y  $f$ , y la condición (3) del enunciado. De (8.1) se deduce que

$$g'(t) = DW(\Phi(t, x))f(\Phi(t, x)) \geq \alpha$$

para todo  $t \geq 0$ , luego

$$g(t) \geq g(0) + \alpha t,$$

y haciendo  $t \rightarrow \infty$  deducimos  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ , lo cual es absurdo porque al ser la función  $W$  continua debe estar acotada en  $B(x_0, \varepsilon)$ .  $\square$

## 8.2. Conjuntos invariantes y conjuntos límite

Al estudiar el principio de invariancia de Krasovskii-LaSalle (Teorema 8.2) ya hemos definido lo que son los conjuntos positivamente invariantes, negativamente invariantes, e invariantes.

Es fácil probar, y se propone como ejercicio, que las intersecciones y las uniones arbitrarias de conjuntos  $(\pm)$  invariantes son  $(\pm)$  invariantes, y que la adherencia de un conjunto  $(\pm)$  invariante es  $(\pm)$  invariante.

También en la demostración de este principio de invariancia han aparecido los conjuntos omega-límite, cuya definición recordamos y extendemos a continuación.

**Definición 8.2** (Conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite). Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ . Se define el conjunto  $\omega$ -límite de un punto  $x \in \Omega$  como el conjunto en el que la órbita de  $x$  se acumula para tiempos que van a infinito, es decir

$$\omega(x) = \{y \in \Omega : \text{existe una sucesión } (t_k) \rightarrow +\infty \text{ tal que } y = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x)\}.$$

Análogamente se define el conjunto  $\alpha$ -límite de  $x$  como

$$\alpha(x) = \{y \in \Omega : \text{existe una sucesión } (t_k) \rightarrow -\infty \text{ tal que } y = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x)\}.$$

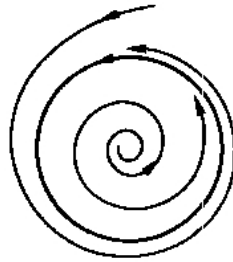
Estos conjuntos son vacíos por definición cuando  $I_x$  no contiene a  $[0, +\infty)$  o a  $(-\infty, 0]$ .

**Observación 8.5.** Es evidente que si  $y \in \mathcal{O}_x$  entonces  $\omega(y) = \omega(x)$  y  $\alpha(y) = \alpha(x)$ .

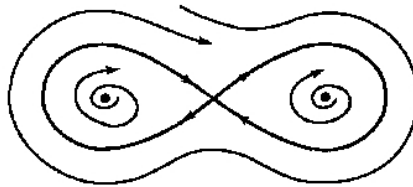
Por ejemplo, si  $x_0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable y  $x$  está suficientemente cerca de  $x_0$ , se tendrá  $\omega(x) = \{x_0\}$ . Si  $x_0$  es un surtidor entonces  $\alpha(x) = \{x_0\}$  para puntos  $x$  cercanos a  $x_0$ .



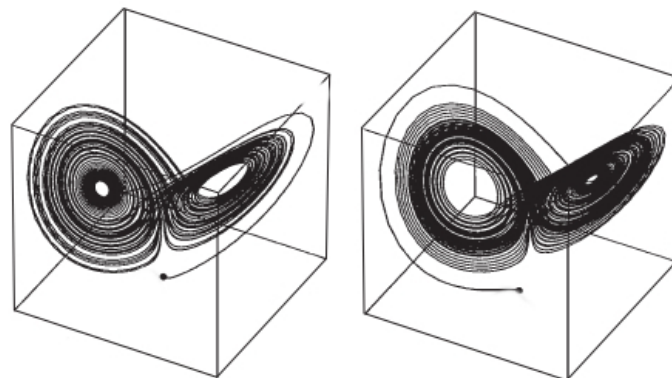
Un ejemplo menos trivial de conjunto  $\omega$ -límite es el de una órbita cerrada a la cual las órbitas de los puntos cercanos se aproximan en espiral.



También puede haber conjuntos límite que no son ni equilibrios ni órbitas cerradas, como en la siguiente figura.



En realidad, como veremos en el siguiente capítulo, si un conjunto límite en el plano  $\mathbb{R}^2$  no es ni un equilibrio ni una órbita cerrada, entonces está compuesto de equilibrios y órbitas inyectivas que unen los puntos de equilibrio, como en esta figura. En tres o más dimensiones los fenómenos que pueden ocurrir son extremadamente complicados, y los conjuntos límite muy difíciles de describir en general. Hay libros enteros dedicados a un sólo ejemplo, como el atractor de Lorenz.



A continuación vemos algunas propiedades elementales de los conjuntos límites.

**Lema 8.6.** *Los conjuntos  $\omega(x)$  y  $\alpha(x)$  son cerrados e invariantes.*

*Demostración.* Se deja como ejercicio para el lector (las ideas necesarias están contenidas en la demostración del Teorema 8.2).  $\square$

**Proposición 8.7.** *Supongamos que  $\mathcal{O}_x^+ \subseteq C$ , donde  $C$  es compacto. Entonces  $\omega(x) \subseteq C$ , es no vacío, compacto, y conexo. Además, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} d(\Phi_x(t), \omega(x)) = 0.$$

*Análogamente para  $\mathcal{O}_x^-$  y  $\alpha(x)$ .*

*Demostración.* La compacidad de  $C$  garantiza que  $\omega(x) \neq \emptyset$ . El lema anterior nos dice que este conjunto es cerrado, y es obvio que está contenido en  $C$ , y como  $C$  es compacto se deduce que  $\omega(x)$  es también compacto. Para ver que es conexo, su pongamos que no lo fuera, entonces podríamos descomponerlo en dos compactos disjuntos a distancia positiva, digamos

$$\omega(x) = K_1 \cup K_2, \text{ con } d(K_1, K_2) > 0 \text{ y } K_1, K_2 \text{ compactos.}$$

Existirían entonces dos sucesiones  $t_k \nearrow \infty$ ,  $s_k \nearrow \infty$  tales que

$$z_1 := \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x) \in K_1, \quad z_2 := \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(s_k, x) \in K_2.$$

Definamos

$$\delta = d(K_1, K_2), \quad U_1 = \{y : d(y, K_1) < \delta/3\}, \quad U_2 = \{y : d(y, K_2) < \delta/3\},$$

de forma que  $U_1$  y  $U_2$  son disjuntos y entornos abiertos de  $K_1$  y de  $K_2$  respectivamente. Fijado  $k$ , podemos suponer  $s_k < t_k$  por ejemplo y usar el hecho de que el trozo de órbita  $O_k = \{\Phi(t, x) : t \in [s_k, t_k]\}$  es conexo para encontrar un número  $r_k \in [s_k, t_k]$  tal que

$$\Phi(r_k, x) \in O_k \setminus (U_1 \cup U_2) \subset C \setminus (U_1 \cup U_2).$$

Ahora, como  $C \setminus (U_1 \cup U_2)$  es compacto, podemos extraer una subsucesión  $r_{k_j}$  de  $r_k$  tal que  $\Phi(r_{k_j}, x)$  converge a un punto  $z_0 \in C \setminus (U_1 \cup U_2)$ . Pero obviamente  $\lim_{j \rightarrow \infty} r_{k_j} = \infty$ , y por tanto  $z_0 \in \omega(x) = K_1 \cup K_2 \subset U_1 \cup U_2$ , lo que resulta en una contradicción.

Finalmente, la comprobación de que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{dist}(\Phi_x(t), \omega(x)) = 0$  se propone como ejercicio.  $\square$

**Definición 8.3.** Diremos que un subconjunto no vacío, compacto e invariante es minimal si no tiene ningún subconjunto propio con estas tres propiedades (compacto, invariante, no vacío).

Un ejemplo de conjunto minimal es el de una órbita periódica, o el de un punto de equilibrio. En dos dimensiones, como veremos en el próximo capítulo, estos dos son los únicos ejemplos posible. Sin embargo, en  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$  hay órbitas densas en hipersuperficies compactas, y en este caso una tal hipersuperficie será minimal.

Es evidente que si  $C$  es minimal entonces  $C = \omega(x) = \alpha(x)$  para todo  $x \in C$ .

**Proposición 8.8.** *Todo compacto positivamente invariante  $C \neq \emptyset$  contiene un conjunto positivamente invariante minimal.*

*Análogamente para negativamente invariante.*

*Si además  $C$  es homeomorfo a un disco cerrado  $m$ -dimensional (con  $m$  no necesariamente igual a  $n$ ), entonces  $C$  contiene un punto de equilibrio.*



*Demostración.* Para la primera parte, zornicamos: considerando la familia  $\mathcal{F}$  de todos los subconjuntos compactos, positivamente invariantes y no vacíos de  $C$ , ordenada parcialmente por inclusión, se comprueba inmediatamente que toda subfamilia totalmente ordenada por inclusión tiene la propiedad de intersección finita, y por tanto, por compacidad, una cota inferior. Por el lema de Zorn, deducimos que existe un compacto invariante no vacío minimal.

Para la segunda parte, consideremos una sucesión  $T_j \searrow 0$ . Por el teorema del punto fijo de Brouwer, como  $C$  es homeomorfo a un disco cerrado e invariante, existe  $x_j$  un punto fijo de  $\Phi^{T_j} : C \rightarrow C$ . Como  $C$  es compacto puede suponerse, salvo extracción de una subsucesión, que existe  $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$ . Para todo  $t > 0$  puede escogerse  $n_j \in \mathbb{N}$  tal que  $t \in [n_j T_j, (n_j + 1) T_j)$ . Entonces, usando que  $\Phi^{n_j T_j}(x_j) = x_j$ , tenemos, por la continuidad de  $\Phi$  y observando que  $\lim_{j \rightarrow \infty} n_j T_j = t$ , que

$$\Phi(t, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi(n_j T_j, x_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x,$$

y como  $t$  es arbitrario se deduce que  $x$  es un punto de equilibrio. □

### 8.3. Estabilidad de compactos invariantes

Volviendo a las técnicas de Liapunov y conectándolas con los conjuntos límite, es interesante observar que los argumentos de los Teoremas 8.1 y 8.2 pueden usarse para demostrar la estabilidad o la estabilidad asintótica de conjuntos invariantes más grandes que un punto. Si, por ejemplo,  $C$  es una órbita cerrada de  $x' = f(x)$ , es natural preguntarse cuándo sucederá que toda solución que comience cerca de  $C$  será atraída por  $C$  en tiempo infinito, es decir, cuándo se tendrá  $\omega(x) = C$  para todo  $x$  suficientemente cerca de  $M$ .



El siguiente resultado responde a esta pregunta.

**Teorema 8.9** (de estabilidad asintótica de compactos invariantes). Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial  $C^1$ , y  $C \subset \Omega$  un subconjunto compacto no vacío invariante por el flujo de  $f$ . Supongamos que existe una función continua  $V : U \rightarrow [0, \infty)$  definida en un entorno abierto  $U$  de  $C$  tal que:

1.  $V(x) = 0 \iff x \in C$ .
2.  $V$  es de clase  $C^1$  en  $U \setminus C$ .
3.  $DV(x)f(x) < 0$  para todo  $x \in U \setminus C$ .

Entonces para todo entorno abierto  $A$  de  $C$  existe un entorno abierto  $W$  de  $C$  tal que para todo  $x \in W$  se tiene  $\mathcal{O}_x^+ \subset A$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, x), C) = 0,$$

y también

$$\omega(x) \subseteq C.$$

Si además  $C$  es una órbita cerrada, se tiene que de hecho  $\omega(x) = C$  para todo  $x \in W$ .

En este sentido puede decirse que  $C$  es asintóticamente estable.

Por otro lado, si la desigualdad de (3) es no estricta, entonces al menos puede asegurarse que para todo entorno abierto  $A$  de  $C$  existe un entorno abierto  $W$  de  $C$  tal que  $\mathcal{O}_x^+ \subset A$  para todo  $x \in W$  (y en este sentido puede decirse que  $C$  es estable).

*Demostración.* Definamos, para cada  $r > 0$

$$B(C, r) = \{y \in \Omega : d(y, C) \leq r\},$$

y fijemos  $\delta > 0$  tal que  $B(x_0, \delta) \subset U$  (este  $\delta$  necesariamente existe por compacidad de  $C$ ). Nótese que

$$\partial B(C, \delta) = \{y \in \Omega : d(y, C) = \delta\} \subset U$$

es también compacto. Denotemos

$$\alpha := \min_{x \in \partial B(C, \delta)} V(x),$$

que es estrictamente positivo gracias a la compacidad de  $\partial B(C, \delta)$ , la continuidad de  $V$ , y la condición (1) del enunciado. Definamos

$$U_1 := \{x \in B(C, \delta) : V(x) < \alpha\},$$

y para cada  $x \in U_1$  consideremos la función  $g(t) = g_x(t)$  definida por

$$g(t) = V(\Phi(t, x)).$$

Puesto que  $g_x$  es decreciente, ninguna solución que comience en  $U_1$  puede cortar al conjunto  $\partial B(C, \delta)$  (en efecto, si para algún  $x \in U_1$  y  $t_1$  se tuviera  $d(\Phi(t_1, x), C) = \delta$  entonces podemos suponer, tomando el ínfimo de tales  $t_1$ , que  $\Phi(t, x) \in B(C, \delta)$  para todo  $t \in [0, \delta_1]$ , y entonces, por definición de  $\alpha$  y de  $U_1$ ,  $g(t_1) = V(\Phi(t_1, x)) \geq \alpha > g(0)$ , con lo que  $g$  no sería decreciente). Por tanto toda solución que comienza en  $U_1$  nunca abandona  $B(C, \delta)$ . Como este conjunto es compacto, los teoremas de prolongación del Capítulo 3 muestran que  $\Phi(t, x)$  tiene que estar definido para todo  $t \in [0, \infty)$ . Y como  $\delta > 0$  puede tomarse arbitrariamente pequeño, este argumento prueba que para todo entorno abierto  $A$  de  $C$  existe un entorno abierto  $W$  de  $C$  tal que  $\mathcal{O}_x^+ \subset A$  para todo  $x \in W$ .

Supongamos ahora que la desigualdad de (3) es estricta. Esto quiere decir que  $g_x(t)$  es estrictamente decreciente (en los intervalos en que  $\Phi(t, x) \in U \setminus C$ ). Veamos que entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, x), C) = 0$  para todo  $x \in U_1 \setminus C$ . En efecto, de lo contrario existirían un número  $\varepsilon > 0$  y una sucesión  $t_k \nearrow \infty$  tales que

$$d(\Phi(t_k, x), C) \geq \varepsilon$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Puesto que ya sabemos que  $x_k := \Phi(t_k, x) \in B(C, \delta)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $B(C, \delta)$  es compacto, podemos suponer, pasando a una subsucesión de  $(t_k)$  si fuera necesario, que  $(x_k)$  converge a un punto  $z_0 \in B(C, \delta)$ . Necesariamente se tiene

$$d(z_0, C) \geq \varepsilon,$$

y en particular  $z_0 \in B(C, \delta) \setminus C$ . Además, al ser decreciente la función  $g_x(t)$  y estar acotada inferiormente, existe el límite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g_x(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} V(\Phi(s, x)).$$

Por la continuidad del flujo tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t, x_k) = \Phi(t, z_0),$$

y al ser  $V$  decreciente sobre las órbitas contenidas en  $U \setminus C$  y ser  $z_0 \in B(C, \delta) \setminus C \subset U \setminus C$ , para  $t > 0$  tenemos

$$V(\Phi(t, z_0)) < V(\Phi(0, z_0)) = V(z_0).$$

Pero por otro lado, usando la continuidad de  $\Phi$  y de  $V$ , y la existencia del límite de  $g_x$  en  $\infty$ , tenemos

$$\begin{aligned} V(z_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(t_k, x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_x(t_k) = \lim_{s \rightarrow \infty} g_x(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_x(t_k + t) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(t_k + t, x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(t, x_k)) = V(\Phi(t, z_0)), \end{aligned}$$

lo que contradice la desigualdad anterior. Por tanto necesariamente tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, x), C) = 0 \text{ para todo } x \in U_1 \setminus C.$$

Esto implica que  $\omega(x) \subseteq C$  si  $x \in U_1 \setminus C$ , ya que para todo  $z \in \omega(x)$  existe una sucesión  $t_k \nearrow \infty$  tal que  $z = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x)$ , y por tanto, usando la propiedad triangular de la distancia,

$$0 \leq d(z, C) \leq d(z, \Phi(t_k, x)) + d(\Phi(t_k, x), C) \rightarrow 0$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ , de donde  $d(z, C) = 0$ , lo que por ser  $C$  cerrado conlleva que  $z \in C$ .

Finalmente veamos que  $\omega(x) = C$  si  $C$  es una órbita cerrada de  $x' = f(x)$ . Si tomamos  $z \in \omega(x) \subseteq C$ , como ya sabemos que  $\omega(x)$  es compacto e invariante, tendremos  $\mathcal{O}_z \subseteq \omega(x)$ . Pero para cualquier  $z \in C$  se tiene  $\mathcal{O}_z = C$  al ser  $C$  una órbita periódica. Por tanto  $C \subseteq \omega(x)$ , y en definitiva  $\omega(x) = C$ .  $\square$

## 8.4. Problemas

**Problema 8.1.** Construyendo una función de Liapunov adecuada de la forma  $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ , estudiar la estabilidad en el origen del sistema

$$\begin{cases} x' = 2y(z - 1) \\ y' = -x(z - 1) \\ z' = xy. \end{cases}$$

**Problema 8.2.** Construyendo funciones de Liapunov adecuadas, de la forma  $L(x, y) = ax^2 + by^2$ , estudiar la estabilidad del origen en los sistemas

$$\begin{cases} x' = -x^3 + xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2 \\ y' = -y^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x^3 - y^3 \\ y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -x^3 + 2y^3 \\ y' = -2xy^2. \end{cases}$$

**Problema 8.3.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = y - xg(x, y) \\ y' = -x - yg(x, y), \end{cases}$$

donde  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ . Probar que si  $g(x, y) > 0$  en un entorno del origen entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, y que si  $g(x, y) < 0$  en un entorno del origen entonces éste es un punto de equilibrio inestable.

**Problema 8.4.** En el sistema siguiente (donde  $\varepsilon > 0$ ), probar que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, y estimar su cuenca de atracción:

$$\begin{cases} x' = y - \varepsilon(x - \frac{x^3}{3}) \\ y' = -x. \end{cases}$$

**Problema 8.5.** Deducir el principio de linealización de los teoremas de estabilidad e inestabilidad de Liapunov.

**Problema 8.6** (Sistemas gradientes). Un sistema de la forma  $x' = f(x)$ , donde  $f = -\nabla V$  para cierta  $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que es un sistema gradiente. Demostrar que:

1. Todo mínimo local de  $V$  que sea también un punto crítico aislado de  $V$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de  $f$ .
2. En todo punto de equilibrio, los autovalores de la parte lineal del sistema son reales.
3. El sistema no posee curvas integrales periódicas no constantes.
4. En los puntos regulares, las curvas integrales de  $f$  cortan ortogonalmente a las superficies de nivel de  $V$ .
5. Para cada  $x \in \Omega$ ,  $V$  es constante sobre  $\omega(x)$  y  $\alpha(x)$ . Deducir que todo punto  $\omega$ -límite es un punto de equilibrio, y lo mismo para los  $\alpha$ -límites.
6. Una trayectoria  $\Phi(t, x)$  de un sistema  $y' = f(y)$  se dice que es *recurrente* si existe una sucesión  $t_k \rightarrow \infty$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x) = x$ . Probar que si  $f$  es un campo gradiente entonces  $f$  no tiene ninguna trayectoria recurrente que no sea constante.

**Problema 8.7.** Continuando con el problema anterior, supongamos además que para cada  $r \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $V^{-1}(-\infty, r]$  es compacto, y que  $DV(x) \neq 0$  excepto para un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_m\}$ . Probar que entonces toda curva integral de  $f$  está definida para todo  $t \geq 0$ , y converge, cuando  $t \rightarrow +\infty$ , a alguno de los puntos  $p_1, \dots, p_m$ .

**Problema 8.8.** Usando los dos problemas anteriores, esbozar el diagrama de fases de  $f$  en los siguientes casos

$$V(x, y) = x^2 + y^2, \quad V(x, y) = x^2 - y^2, \quad V(x, y) = x^4 - x^2 + y^2.$$

**Problema 8.9.** Encontrar funciones de potencial para los siguientes sistemas:

1.  $x'' = -kx$  (oscilador armónico);
2.  $x'' + k \operatorname{sen} x = 0$  (ecuación del péndulo ideal);
3.  $x'' = f(x)$  (ecuación de Newton unidimensional, correspondiente al movimiento de una partícula de masa unidad moviéndose en  $\mathbb{R}$  bajo la acción de una fuerza externa  $f$ );
4.  $x'' = -GMx/\|x\|^3$  (campo gravitatorio en  $\mathbb{R}^3$ ).

**Problema 8.10** (Teorema de Lagrange). Consideremos el sistema conservativo  $x'' = f(x) = -\nabla U(x)$ , con  $U \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ , siendo  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Este sistema equivale a

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\nabla U(x), \end{cases}$$

es decir  $(x', v') = F(x, v) = (v, -\nabla U(x))$ , con  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

Probar que si el potencial  $U$  tiene un mínimo local estricto en  $x_0$ , entonces el punto  $(x_0, 0)$  es un punto de equilibrio *estable* de  $F$ .

*Indicación:*  $E(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + U(x) - U(x_0)$  es una función de Liapunov.

**Problema 8.11.** Sea  $U$  un potencial de clase  $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  que está acotado inferiormente. Demostrar que las curvas integrales del sistema conservativo  $x'' = -\nabla U(x)$  están definidas para todo tiempo (es decir el campo  $F(x, v) = (v, -\nabla U(x))$  es completo).

**Problema 8.12** (Sistemas conservativos con un grado de libertad). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  y definamos  $U(x) = -\int_0^x f(u)du$ .

1. Probar que los conjuntos de nivel de la energía  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y^2 + U(x) = c\}$  son curvas de clase  $C^1$  alrededor de cada punto regular (es decir que no sea de equilibrio).
2. Si  $xf(x) < 0$  cuando  $x \neq 0$ , probar que el punto  $(0, 0)$  es estable pero no asintóticamente estable, y las órbitas alrededor de  $(0, 0)$  son periódicas.
3. Esbozar las curvas de nivel de la energía cuando  $xf(x) > 0$  para  $x \neq 0$  y deducir que en este caso el origen es un equilibrio inestable.
4. Esbozar el diagrama de fases del sistema cuando la función  $U(x)$  tiene varios máximos y mínimos relativos, tiende a  $-\infty$  en  $-\infty$ , y tiende a  $+\infty$  en  $+\infty$ .
5. Probar que si  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$  entonces todas las soluciones no constantes son periódicas.

**Problema 8.13.** Consideremos ahora el sistema con rozamiento:

$$x'' + \nabla V(x) + kx' = 0,$$

donde  $k > 0$ . Probar, escribiendo la ecuación como un sistema de primer orden y construyendo una función de Liapunov adecuada, que los puntos de la forma  $(x_0, 0)$ , siendo  $x_0$  un mínimo local estricto de  $V$ , son puntos de equilibrio asintóticamente estables.

**Problema 8.14.** Esbozar los diagramas de fases de los sistemas:

1.  $x'' = -x$ .
2.  $x'' = x - 2x^3$ .
3.  $x'' = ax + bx^3$ .
4.  $x'' + \sin x = 0$  (péndulo sin rozamiento: un sistema conservativo).
5.  $x'' + bx' + c \sin x = 0$ , con  $b, c > 0$  (péndulo con rozamiento: un sistema disipativo, donde la energía se va perdiendo).

En el caso del péndulo sin rozamiento, cuando la energía total es  $E = 2$ , calcular el tiempo que le lleva al péndulo ir de  $x = 0$  a  $x = \pi$ .

En el caso del péndulo con rozamiento, probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todo ángulo  $\theta_0$  existe un estado inicial  $(\theta_0, \omega_0)$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \theta_0, \omega_0) = (0, 0)$  y que recorre  $n$  veces, pero no  $n + 1$  veces, la circunferencia.

**Problema 8.15.** Consideremos un sistema más general con rozamiento:

$$x'' + \eta(x)x' + U'(x) = 0,$$

con  $\eta(x) > 0$ . Usar la energía como función de Liapunov para probar que no hay órbitas periódicas no constantes, y que todos los mínimos de  $U(x)$  dan lugar a puntos asintóticamente estables del sistema equivalente en  $\mathbb{R}^2$ .

**Problema 8.16.** Consideremos la ecuación

$$x'' + ax' + 2xe^{-x^2} = 0,$$

con  $a \geq 0$ . En el caso  $a = 0$ , estudiar la estabilidad del origen y esbozar el diagrama de fases. En el caso  $a > 0$ , probar que el origen es asintóticamente estable y estimar su cuenca de atracción.

**Problema 8.17.** Se dice que un campo de fuerza  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *central* si es de la forma  $f(x) = \lambda(x)x$  para alguna función  $\lambda : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  y que es *conservativo*, es decir,  $f = -\nabla V$  para alguna función  $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es central.
2.  $f$  es de la forma  $f(x) = \mu(\|x\|)x$ , donde  $\mu : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .
3.  $f(x) = -\nabla V(x)$ , donde  $V$  es de la forma  $V(x) = \alpha(\|x\|)$ , con  $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Indicación:* para probar (1)  $\implies$  (3) basta ver que  $V$  es constante en cada esfera  $S_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = r\}$ ,  $r > 0$ . Para ello considerar una curva cualquiera  $\gamma : [a, b] \rightarrow S_r$  y derivar la función  $V(\gamma(t))$ .

**Problema 8.18.** Demostrar que si una partícula se mueve en  $\mathbb{R}^3$  por acción de una fuerza central  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces su trayectoria  $x(t)$  está contenida en un plano que pasa por el origen. Si  $m$  es la masa de la partícula y  $v(t)$  su vector velocidad, probar también que el vector  $m(x(t) \times v(t))$  (al que se llama *momento angular* es constante (no depende de  $t$ ).

*Indicación:* considerar el sistema

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = f(x) = \lambda(x)x \end{cases}$$

y derivar el producto vectorial  $x \times v$ .

**Problema 8.19.** Continuando con el problema anterior, si  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  es la trayectoria de una partícula de masa  $m$  sometida a un campo de fuerza central  $f$ , tomando coordenadas adecuadas podemos suponer que  $x_3(t) \equiv 0$ , y el momento angular es constante e igual al vector  $(0, 0, mx_1v_2 - mx_2v_1)$ . Es decir,

$$\ell = m(x_1(t)v_2(t) - x_2(t)v_1(t))$$

es constante.

1. Reescribir esta ecuación usando coordenadas polares en el plano  $x_3 = 0$  y deducir que

$$\ell = m r(t)^2 \theta'(t)$$

es constante.

2. Usar la conocida consecuencia de la fórmula de Green que da una fórmula para el área del recinto encerrado por una curva plana  $\gamma$ , es decir  $A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx$ , en el caso particular en que  $\gamma(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$ , para demostrar que el área de la región del plano  $x_3 = 0$  delimitada por los vectores  $x(t)$  y  $x(t_0)$ , y la curva  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t]$ , viene dada por

$$A(t) = \int_{t_0}^t r(s)^2 \theta'(s) ds = \frac{\ell}{m} (t - t_0).$$

3. Deducir la *segunda ley de Kepler*: el segmento que une el Sol con un planeta del sistema solar barre áreas iguales en tiempos iguales.

**Problema 8.20.** Consideremos ahora el caso especial del campo gravitatorio newtoniano,  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x) = -\frac{x}{\|x\|^3},$$

donde sin pérdida de generalidad se ha realizado un cambio de escala para que el producto de la masa por la constante de gravitación universal resulte 1. Por los problemas anteriores sabemos que una solución  $x(t)$  de esta ecuación se moverá en un plano fijo que pasa por el origen (y que podemos suponer  $x_3 = 0$ ), que la energía se conserva, y que el momento angular se conserva.

1. Usar que  $r^2 \theta' = \text{constante}$  para probar que  $r$  puede considerarse una función de  $\theta$ .
2. Denotando  $W = 1/r$ , observar que  $W$  también es función de  $\theta$  (ya que  $r$  lo es), y que  $W(t) = -V(x(t))$ , y demostrar que la energía cinética del sistema es

$$K := \frac{1}{2} ((r')^2 + (r\theta')^2) = \frac{\ell^2}{2} \left( \left( \frac{dW}{d\theta} \right)^2 + W^2 \right)$$

3. Denotando  $E$  la energía total del sistema, observar que  $K = E - U = E + W$ . Aplicando la fórmula del apartado anterior se tiene

$$\left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2 + W^2 = \frac{2}{\ell^2}(E + W).$$

Derivar dos veces esta ecuación respecto de  $\theta$ , y usar el teorema de conservación de la energía  $dE/d\theta = 0$  para deducir que

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + W = \frac{1}{\ell^2}.$$

4. Resolver la última ecuación para probar que

$$W(\theta) = \frac{1}{\ell^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2E\ell^2} \cos(\theta + \theta_0)\right).$$

5. Recordar, o demostrar si no se sabe, que la ecuación de una cónica en coordenadas polares es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\kappa}(1 + \epsilon \cos \theta),$$

donde el origen es un foco,  $\epsilon$  es la excentricidad de la cónica y  $\kappa$  es su *latus rectum*.

6. Deducir la *primera ley de Kepler*: la trayectoria de una partícula sometida al campo gravitatorio newtoniano es una cónica de excentricidad  $\sqrt{1 + 2E\ell^2}$ . Si  $E > 0$  esta trayectoria es una hipérbola; si  $E = 0$  es una parábola, y si  $E < 0$  es una elipse.
7. Suponiendo que se ha observado experimentalmente que un planeta tiene una órbita periódica alrededor del sol, concluir que dicho planeta describe una elipse de la cual el sol es uno de sus focos.

**Problema 8.21.** El siguiente sistema de ecuaciones (llamadas de Lotka-Volterra) representa un modelo de dos especies que interactúan, donde la especie  $x$  es el alimento (presa) de la especie  $y$  (predador). El sistema (no lineal) viene dado por

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (cx - d)y \end{cases}$$

donde  $a, b, c, d > 0$ . La constante  $a$  nos indica la tasa de crecimiento de la población  $x$  en ausencia de la población predatoria  $y$ . La constante  $d$  indica la tasa de mortalidad de la especie predatoria cuando se extingue la población presa. Las constantes  $b$  y  $c$  determinan el efecto de la interacción entre ambas especies. Por ejemplo,  $b$  mide la cantidad proporcional de individuos de la especie presa que son devorados por unidad de tiempo por la especie predatoria.

1. Interpretar la constante  $c$ .
2. Demostrar que los semiejes positivos son trayectorias de soluciones, y concluir que el primer cuadrante es un conjunto positivamente invariante.
3. Determinar los puntos de equilibrio del sistema en el primer cuadrante.
4. Estudiar el sistema linealizado en estos puntos de equilibrio ¿Qué puede concluirse?
5. Determinar una función de Liapunov de la forma  $V(x, y) = F(x) + G(y)$  en el primer cuadrante. Probar que el punto crítico  $(d/c, a/b)$  es estable, y demostrar que todas las demás soluciones que empiezan en el primer cuadrante describen órbitas cerradas alrededor de este punto de equilibrio.

**Problema 8.22.** Si en el modelo anterior de Lotka-Volterra se supone que un cierto número de presas  $x_r$  puede encontrar un refugio que las hace inaccesibles a los depredadores, las ecuaciones se convierten en

$$\begin{cases} x' = ax - by(x - x_r) \\ y' = -dy + cy(x - x_r) \end{cases}$$

Analizar el diagrama de fases de este sistema, comparándolo con el original de Lotka-Volterra, en los dos casos siguientes:

1. El número de presas en el refugio es una fracción constante del total, es decir,  $x_r = kx$ .
2. El número de presas en el refugio es constante, es decir,  $x_r = k$ .

**Problema 8.23.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -x + (2 - x)y \\ y' = -y + (2 - y)x \end{cases}$$

Se pide:

1. Determinar y clasificar sus puntos de equilibrio.
2. Probar que el conjunto  $\Omega = (0, 2) \times (0, 2)$  es positivamente invariante.
3. Probar que toda solución que comienza en  $\Omega$  converge a un punto de equilibrio del sistema en tiempo infinito.
4. Dibujar el diagrama de fases.

**Problema 8.24.** Dibujar los diagramas de fases de los sistemas

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1 \\ y' = xy, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = xy. \end{cases}$$

*Indicación:* observar que si  $(x(t), y(t))$  es solución entonces también lo es  $(x(t), -y(t))$ .

**Problema 8.25.** Una población está dividida en  $x$  individuos susceptibles de contraer una enfermedad e  $y$  individuos infectados por ella. Si la probabilidad de contagio por contacto es  $r$  y la enfermedad tiene vida media  $\log 2/\gamma > 0$ , se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x' = -rxy \\ y' = -\gamma y + rxy. \end{cases}$$

Se pide:

1. Estudiar si la estabilidad de los puntos de equilibrio se puede decidir por linealización.
2. Hallar una integral primera. Dibujar las órbitas del primer cuadrante. ¿Hacia dónde convergen las trayectorias? Interpretar el resultado.
3. Discutir el llamado *teorema del umbral de la epidemiología de Kermack-McKendrick*: para que se extienda una epidemia debe haber un número inicial  $x_0$  suficiente (mayor que un cierto umbral  $u$ ) de individuos susceptibles, y si  $x_0 - u > 0$  es pequeño, el número de individuos que terminarán contrayendo la enfermedad es, aproximadamente,  $2(x_0 - u)$ .

**Problema 8.26.** Sea  $V$  una función de Liapunov estricta para un punto de equilibrio  $x_0$  de un sistema  $x' = f(x)$ , y sea  $r > 0$  tal que  $V^{-1}[0, r]$  es compacto y no contiene ningún otro punto de equilibrio. Probar que  $V^{-1}[0, r] \subset B(x_0)$ .



**Problema 8.27.** Esbozar el diagrama de fases y hallar los conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite del sistema

$$\begin{cases} x' = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

según los valores del parámetro  $\mu \in \mathbb{R}$ .

**Problema 8.28.** Probar que las intersecciones y las uniones arbitrarias de conjuntos  $(\pm)$  invariantes son  $(\pm)$  invariantes, y que la adherencia de un conjunto  $(\pm)$  invariante es  $(\pm)$  invariante.

**Problema 8.29.** Probar que los conjuntos  $\omega(x)$  y  $\alpha(x)$  son cerrados e invariantes.

*Indicación:* ver la demostración del Teorema 8.2.

**Problema 8.30.** Supongamos que  $\mathcal{O}_x^+$  está contenida en un compacto. Probar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi_x(t), \omega(x)) = 0.$$

Análogamente para  $\mathcal{O}_x^-$  y  $\alpha(x)$ .

**Problema 8.31.** Identificando  $\mathbb{R}^4$  con  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} w' = 2\pi i w \\ z' = 2\pi \theta i z, \end{cases}$$

donde  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

1. Si  $\xi := e^{2\pi\theta i}$ , probar que el conjunto  $\{\xi^n : n \in \mathbb{N}\}$  es denso en la circunferencia unidad  $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .
2. Si  $\Phi_t(w, z) = \Phi(t, w, z)$  denota el flujo de este sistema, demostrar que para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$\Phi_n(w, z) = (w, \xi^n z).$$

3. Si  $(w_0, z_0)$  está en el toro  $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^2$ , demostrar que sus conjuntos límite satisfacen

$$\omega(w_0, z_0) = \alpha(w_0, z_0) = \mathbb{T} \times \mathbb{T}.$$

4. Hallar  $\omega(w, z)$  y  $\alpha(w, z)$  para cualquier  $(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .

**Problema 8.32.** En el problema anterior, suponer ahora que  $\theta \in \mathbb{Q}$ , y en este caso hallar  $\omega(w, z)$  y  $\alpha(w, z)$  para cualquier  $(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .

**Problema 8.33.** El siguiente caso particular de la ecuación de Liénard

$$\begin{cases} x' = y - f(x) \\ y' = -x, \end{cases}$$

donde  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (y que corresponde a la ecuación de segundo orden  $x'' + f'(x)x' + x = 0$  que tiene importancia en la teoría de sistemas eléctricos (por ejemplo en el caso  $f(x) = x^3 - x$  se obtiene la ecuación de Van der Pol).

1. Determinar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema en función de  $f'(0)$ .
2. Si  $xf(x) > 0$  para  $x \neq 0$ , probar que el origen es asintóticamente estable, y estimar su cuenca de atracción.

**Problema 8.34.** Continuando con el problema anterior, supongamos que:

- (I)  $f(-x) = -f(x)$ ;
- (II)  $f(x) < 0$  para  $0 < x < \alpha$ ;
- (III)  $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$ ;
- (IV)  $f$  es estrictamente creciente para  $x > \alpha$ .

Demostrar que el sistema tiene una única órbita cerrada que engloba el origen, y que esta órbita cerrada es estable; de hecho, demostrar que su cuenca de atracción es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Problema 8.35.** Sea  $C$  es una órbita cerrada de un sistema  $x' = f(x)$ , y supongamos que  $C$  es asintóticamente estable en el sentido del Teorema 8.9. Sea  $T$  el período de  $C$ . Demostrar que existe un entorno  $W$  de  $C$  tal que para todo  $x \in W$  se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t + T, x) - \Phi(t, x)\| = 0.$$

Se dice en este caso que  $x$  tiene período asintótico igual a  $T$ . Por tanto, las trayectorias cercanas a la órbita cerrada  $C$  se comportan, después de un cierto período de tiempo, casi como  $C$ : no sólo se acercan arbitrariamente a  $C$ , sino que en intervalos de tiempo  $T$  vuelven a pasar casi por el mismo lugar.

## Capítulo 9

# Sistemas planos. Teorema de Poincaré-Bendixson.

En este capítulo final nos centramos en el estudio de los sistemas autónomos en  $\mathbb{R}^2$ , y más en concreto en la cuestión de cómo decidir si un sistema autónomo plano  $(x', y') = f(x, y)$  tiene o no órbitas periódicas no constantes. El teorema de Poincaré-Bendixson, que estudiamos en la segunda sección nos da una respuesta a esta pregunta. La versión más simple de este teorema dice lo siguiente: si  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  y  $K \subset \Omega$  es un compacto positivamente invariante que no contiene puntos de equilibrio (o que contiene sólo surtidores), entonces  $K$  contiene una órbita periódica no constante.

Para abordar la demostración de este teorema necesitaremos algunos preliminares técnicos que comenzamos a estudiar a continuación.

### 9.1. La aplicación de Poincaré

Recordemos que un subconjunto  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  es una hipersuperficie de clase  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$  si puede escribirse en la forma

$$H = \{x \in W : S(x) = 0\},$$

donde  $W$  es un abierto y  $S : W \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^k$  tal que  $\nabla S(x) \neq 0$  para todo  $x \in H$ . Se dice que esta hipersuperficie es *transversal* a un campo vectorial  $f$  si  $f(x)$  no está en el plano tangente a  $H$  en  $x$  para ningún  $x \in H$  (es decir si  $\langle \nabla S(x), f(x) \rangle \neq 0$  para todo  $x \in H$ ).

**Lema 9.1.** Sean  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  un campo vectorial,  $x \in \Omega$ ,  $T \in I_x$ . Sea  $H$  una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$ , transversal a  $f$ , y tal que  $\Phi(T, x) \in H$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  y una única aplicación  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^k$  tal que  $\tau(x) = T$  y

$$\Phi(\tau(y), y) \in H$$

para todo  $y \in U$ .

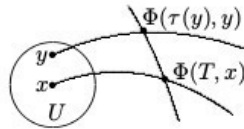
*Demostración.* Si  $H = \{x \in W : S(x) = 0\}$ , consideremos la función

$$G(y, t) = S(\Phi(t, y)).$$

Tenemos  $G(x, T) = 0$ , y como  $f$  es transversal a  $H$  en  $\Phi(T, x) \in H$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t=T, y=x} &= \langle \nabla S(\Phi(t, y)), \frac{d}{dt} \Phi(t, y) \rangle \Big|_{t=T, y=x} = \\ & \langle \nabla S(\Phi(t, y)), f(\Phi(t, y)) \rangle \Big|_{t=T, y=x} = \langle \nabla S(\Phi(T, x)), f(\Phi(T, x)) \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

luego por el teorema de la función existe una única función  $\tau$ , definida en un entorno abierto  $U$  de  $x$ , y que toma valores en  $\mathbb{R}$ , tal que  $\tau(x) = T$  y  $G(y, \tau(y)) = 0$ , lo que equivale a decir que  $\Phi(\tau(y), y) \in H$ , para todo  $y \in U$ .  $\square$



**Definición 9.1.** Sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  un campo vectorial, y  $x_0$  un punto regular de  $f$  (es decir  $f(x_0) \neq 0$ ). Sea  $H$  un hiperplano vectorial tal que  $f(x_0)$  es transversal a  $H$ . Diremos que un entorno  $V$  de  $x_0$  en el hiperplano afín  $x_0 + H$  es una sección transversal de  $f$  en  $x_0$  si se tiene  $f(x) \notin H$  para todo  $x \in V$  (es decir si el trozo de hiperplano afín  $V$  es transversal al campo  $f$ ).

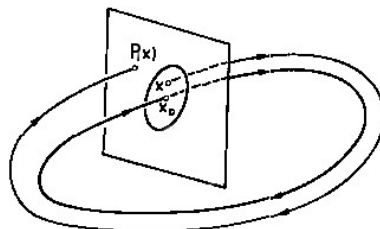
Obsérvese que si  $h$  es una aplicación lineal tal que  $H = \text{Ker } h$ , la condición de transversalidad equivale a  $h(f(x)) \neq 0$  para todo  $x \in V$ . Además, si  $V$  es conexo, entonces o bien  $h(f(x)) > 0$  para todo  $x \in V$ , o bien  $h(f(x)) < 0$  para todo  $x \in V$ .

Para cualquier punto regular  $x_0$  de  $f$ , la forma lineal  $h(y) := \langle f(x_0), y \rangle$  verifica que  $x_0 + \text{Ker } h$  define una sección transversal de  $f$  en un entorno de  $x_0$ . Por tanto, entorno a los puntos regulares de un campo vectorial  $C^1$  siempre existen secciones transversales al campo.

**Definición 9.2** (Aplicación de Poincaré). Sea  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  un campo vectorial,  $\mathcal{O}_{x_0}$  una órbita periódica de período  $T$  (es decir  $\Phi(T, x_0) = x_0$ ), y  $H$  una hipersuperficie transversal a  $f$  y de clase  $C^k$  que contiene a  $x_0$ . Sabemos que existen  $U$  un entorno de  $x_0$  y  $\tau \in C^1(U)$  tales que  $\Phi(\tau(x), x) \in H$  para todo  $x$ . Sea  $W = U \cap H$ . A la aplicación  $P_H : W \rightarrow H$  definida por

$$P_H(x) = \Phi(\tau(x), x)$$

se le llama aplicación de Poincaré asociada a  $f$ . Esta aplicación es de clase  $C^k$ , y a cada punto fijo de esta aplicación le corresponde una órbita periódica de  $f$ .

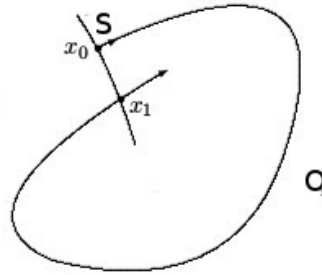


## 9.2. Sistemas planos. El teorema de Poincaré-Bendixson

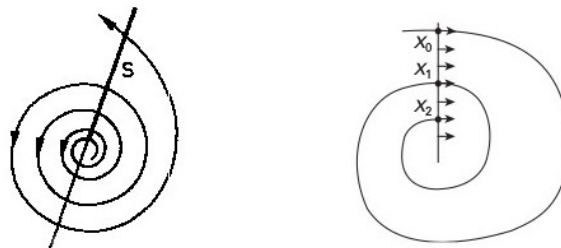
En lo sucesivo consideraremos  $f$  un campo vectorial en un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . En este caso las secciones transversales de  $f$  se llamarán *segmentos transversales* de  $f$ , y la aplicación de Poincaré correspondiente a un segmento transversal  $S$  la denotaremos  $\pi(x) = \Phi(\tau(x), x)$ .

En todo segmento transversal  $S$  podemos considerar una relación de orden natural entre los puntos del segmento, y definir el concepto de sucesión monótona en este segmento. Por otro lado diremos que una sucesión  $y_n = \Phi(t_n, x)$  es monótona sobre la trayectoria  $\mathcal{O}_x$  si la sucesión  $(t_n)$  es monótona en  $\mathbb{R}$ .

**Lema 9.2.** Sea  $S$  un segmento transversal de  $f$ , y sea  $(x_n = \Phi(t_n, x_0))$  la sucesión (quizás finita, monótona sobre la trayectoria) de las intersecciones de la órbita  $\mathcal{O}_{x_0}^+$  con el segmento  $S$ . Entonces  $(x_n)$  también es monótona sobre el segmento  $S$ .



*Demostración.* Podemos suponer por ejemplo que  $x_0 < x_1$  respecto del orden de  $S$ . Considerando la región interior a la curva de Jordan formada por la parte de  $O_x$  que va de  $x_0$  a  $x_1$  más el segmento que va de  $x_1$  a  $x_0$ , se comprueba que dicha región es o bien positivamente invariante, o bien negativamente invariante, y entonces se deduce que  $x_2$  tiene que ser mayor que  $x_1$  respecto del orden considerado en el segmento.



Continuando por inducción se concluye el resultado. □

**Lema 9.3.** Si  $S$  es un segmento transversal de  $f$  y  $z \in S \cap \omega(x)$ , existe una sucesión  $(z_n)$  contenida en  $S \cap O_x^+$  que es monótona sobre la trayectoria  $O_x$  y que satisface  $z = \lim_n z_n$ . Análogamente para  $O_x^-$  y  $\alpha(x)$ .

*Demostración.* Si  $t_n \nearrow +\infty$  y  $\Phi(t_n, x) \rightarrow z$ , puede aplicarse el Lema 9.1 para encontrar un entorno  $U$  de  $z$  y una función  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $\tau(z) = 0$  y  $\Phi(\tau(y), y) \in S$  para todo  $y \in U$ . Entonces  $\tilde{t}_n := t_n + \tau(\Phi(t_n, x)) \rightarrow +\infty$ , y podemos suponer, pasando a una subsucesión si fuera necesario, que  $\tilde{t}_n$  es estrictamente creciente. Definiendo  $z_n := \Phi(\tilde{t}_n, x)$  hemos acabado. □

**Lema 9.4.** Sea  $S$  un segmento transversal,  $x \in \Omega$ . Entonces  $\omega(x)$  corta a  $S$  a lo sumo en un punto. Análogamente para  $\alpha(x)$ .

*Demostración.* Supongamos que hubiera dos puntos distintos  $y, z \in \omega(x) \cap S$ . Por el lema anterior existirían  $(y_n), (z_n)$  contenidas en  $S \cap O_x^+(x)$  que convergen a  $y, z$  respectivamente. Pero esto es imposible porque  $(y_n), (z_n)$  son subsucesiones de la sucesión  $(x_n)$  del lema 9.2 que es monótona sobre  $S$ . □

**Lema 9.5.** Si  $S$  es un segmento transversal de  $f$  y  $\{z\} = S \cap \omega(x)$  entonces la sucesión  $(x_n = \Phi(t_n, x))$  de las intersecciones de la órbita  $O_x^+$  con el segmento  $S$  satisface:

1.  $x_n$  es monótona sobre el segmento  $S$ ;
2.  $\lim_n x_n = z$ ;
3.  $\Phi(t, x) \notin S$  para todo  $t \in (t_n, t_{n+1})$ .

Análogamente para  $\alpha(x)$ .

*Demostración.* Sólo hay que probar (2). La sucesión  $(z_n)$  del lema 9.3 converge a  $z$  y es subsucesión de  $(x_n)$ , luego, al ser ésta monótona sobre  $S$ , también converge a  $z$ . □

**Proposición 9.6.** *Supongamos que  $\omega(x) \cap \mathcal{O}^+(x) \neq \emptyset$ . Entonces  $\Phi(t, x)$  es periódica, y en particular  $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}_x$ . Análogamente para  $\alpha(x)$ .*

*Demostración.* Sea  $y \in \omega(x) \cap \mathcal{O}^+(x)$ . Si  $y$  es un punto de equilibrio el resultado es obvio. Si no, por el Lema 9.3 podemos escoger un segmento transversal  $S$  que contenga a  $y$ , y una sucesión

$$y_n \in S \cap \mathcal{O}_y^+ \subseteq S \cap \omega(x)$$

monótona sobre la trayectoria y tal que  $y_n \rightarrow y$ . Por el Lema 9.4 se tiene  $y_n \equiv y$ , y al ser  $(y_n)$  monótona sobre la trayectoria esto impone que  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$  sea una órbita cerrada.  $\square$

**Corolario 9.7.** *Un compacto invariante minimal en  $\mathbb{R}^2$  es siempre una órbita periódica (una curva cerrada o un equilibrio).*

*Demostración.* Si  $x \in C$  entonces  $\omega(x) = C$  por ser  $C$  minimal, luego  $x \in \mathcal{O}_x^+ \cap \omega(x)$ , y se aplica la proposición anterior.  $\square$

**Teorema 9.8** (Poincaré-Bendixson). *Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $x \in \Omega$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo de clase  $C^1$ . Supongamos que  $\omega(x) \neq \emptyset$  es compacto y no contiene puntos de equilibrio. Entonces  $\omega(x)$  es una órbita cerrada regular.*

*De hecho, hay dos posibilidades excluyentes entre sí: o bien  $\mathcal{O}_x$  es periódica no constante (y  $\mathcal{O}_x = \omega(x)$ ), o bien  $\Phi(t, x)$  se acerca en espiral (cuando  $t \rightarrow \infty$ ) a la órbita periódica no constante  $\omega(x)$ .*

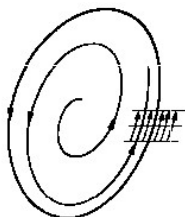
*Análogamente para  $\alpha(x)$ .*

*Demostración.* Sea  $y \in \omega(x)$ , y tomemos  $z \in \omega(y) \subseteq \omega(x)$ . Por hipótesis  $z$  no es un punto de equilibrio. Sea  $S$  un segmento transversal que contiene a  $z$ , y tomemos (usando el Lema 9.3) una sucesión  $y_n \rightarrow z$  con  $y_n \in S \cap \mathcal{O}_y^+$ , monótona sobre la trayectoria. Puesto que  $S \cap \mathcal{O}_y^+ \subseteq S \cap \omega(x) = \{z\}$  por el Lema 9.4, se tiene que  $y_n = z$ , luego  $z \in \mathcal{O}_y \cap \omega(y)$  y, por la Proposición 9.6,  $\mathcal{O}_y = \omega(y)$  es una órbita periódica regular.

Finalmente, veamos que de hecho  $\mathcal{O}_y = \omega_+(x)$ . Para ello basta demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\Phi(t, x), \mathcal{O}_y) = 0.$$

Sea  $z \in \mathcal{O}_y \cap S \subset \omega(x)$ . Por el Lema 9.5 la sucesión  $(x_n)$  de las intersecciones de  $\mathcal{O}_x^+$  con  $S$  cumple que  $x_n = \Phi(t_n, x) \rightarrow z$  monótonamente en  $S$ , y  $\Phi(t, x) \notin S$  para  $t \in (t_n, t_{n+1})$ .



Veamos que existe  $\alpha > 0$  tal que  $0 < t_{n+1} - t_n \leq \alpha$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto, como  $\Phi(t, z)$  es periódica, existe  $T > 0$  tal que  $\Phi(T, z) = z$ . Por el lema 9.1 existe un entorno  $U$  de  $z$  y una función  $\tau$  de clase  $C^1$  tal que  $\Phi(\tau(u), u) \in S$  para todo  $u \in U$ , y  $\tau(z) = 0$ , y por continuidad podemos suponer que  $U$  es suficientemente pequeño para que  $|\tau(u)| < 1$  si  $u \in U$ . Así, para  $n$  suficientemente grande se tendrá  $\Phi(T, x_n) \in U$ , y por tanto  $\Phi(\tau(\Phi(T, x_n)), \Phi(T, x_n)) = \Phi(T + \tau(\Phi(T, x_n)), x_n) \in S$ , luego  $t_{n+1} - t_n \leq T + \tau(\Phi(T, x_n)) < T + 1 := \alpha$ .

Ahora, dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\Phi$  es uniformemente continua en el compacto  $[-\alpha, \alpha] \times (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\})$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|t| \leq \alpha$  y  $\|x_n - u\| \leq \delta$  entonces  $\|\Phi(t, x_n) - \Phi(t, u)\| \leq \varepsilon$ . Eligiendo  $n_0$  suficientemente grande para que  $\|x_n - z\| \leq \delta$  si  $n \geq n_0$  tenemos  $\|\Phi(s, x_n) - \Phi(s, z)\| \leq \varepsilon$  si  $|s| \leq \alpha$  y  $n \geq n_0$ . Entonces, dado cualquier  $t \geq t_{n_0}$  y eligiendo  $n \geq n_0$  tal que  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  tenemos

$$\text{dist}(\Phi(t, x), \mathcal{O}_y) = \text{dist}(\Phi(t, x), \mathcal{O}_z) \leq \|\Phi(t, x) - \Phi(t - t_n, z)\| = \|\Phi(t - t_n, x_n) - \Phi(t - t_n, z)\| \leq \varepsilon,$$

lo que completa la prueba.  $\square$

**Corolario 9.9.** Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $x \in \Omega$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo de clase  $C^1$ . Supongamos que  $\mathcal{O}_x^+$  está contenido en un compacto de  $\Omega$  y que  $\omega(x)$  no contiene puntos de equilibrio. Entonces  $\omega(x)$  es una órbita cerrada regular.

Análogamente para  $\mathcal{O}_x^-$  y  $\alpha(x)$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{O}_x^+$  está contenido en un compacto, sabemos que  $\omega(x)$  es no vacío, compacto, invariante y conexo, y por hipótesis no contiene puntos de equilibrio, luego por el teorema anterior es una órbita cerrada regular.  $\square$

**Corolario 9.10.** Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Supongamos que  $K \subset \Omega$  es un compacto positivamente invariante que no contiene puntos de equilibrio (o que contiene sólo surtidores). Entonces  $K$  contiene una órbita periódica no constante.

Con las mismas ideas y un poco más de trabajo se puede demostrar la siguiente versión más general del teorema de Poincaré-Bendixson.

**Teorema 9.11 (Poincaré-Bendixson).** Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $x \in \Omega$ , y  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Supongamos que  $\omega(x) \neq \emptyset$  es compacto, conexo, y contiene a lo sumo una cantidad finita de puntos de equilibrio. Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes alternativas

1.  $\omega(x)$  es un punto de equilibrio; o
2.  $\omega(x)$  es una órbita periódica regular; o
3.  $\omega(x)$  contiene una cantidad finita de puntos de equilibrio  $x_1, \dots, x_m$  conectados por órbitas inyectivas  $\mathcal{O}_y$  tales que  $\omega(y) \in \{x_1, \dots, x_m\}$ .

Análogamente para  $\alpha(x)$ .

Hasta aquí los resultados positivos sobre existencia de órbitas cerradas. Recordemos ahora un resultado que ya fue propuesto en el Problema 5.15 como consecuencia del Teorema 5.9.

**Teorema 9.12 (Criterio negativo de Bendixson).** Sea  $\Omega$  un abierto simplemente conexo de  $\mathbb{R}^2$ , sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , y supongamos que

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

tiene signo constante y no es idénticamente cero en  $\Omega$ . Entonces  $\Omega$  no contiene ninguna órbita periódica.

Otra demostración de este resultado, que también se propone como ejercicio, consiste en aplicar el teorema de Green al campo  $g = (-f_2, f_1)$ .

**Definición 9.3.** [Ciclo límite] Sean  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , y  $C$  un órbita periódica (no constante) de  $f$ . Se dice que  $C$  es un ciclo límite si  $C$  posee un entorno  $W$  que no contiene ninguna otra órbita periódica.

**Proposición 9.13.** Sea  $C$  un ciclo límite de  $f$ . Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:

1.  $C$  es estable, en el sentido de que existe un entorno  $U$  de  $C$  tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{dist}(\Phi_x(t), C) = 0$  para todo  $x \in U$ , o
2.  $C$  es inestable, es decir, existe  $U$  entorno de  $C$  tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{dist}(\Phi_x(t), C) = 0$  para todo  $x \in U$ , o
3.  $C$  es semiestable, cuando existe un entorno  $U$  de  $C$  tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{dist}(\Phi_x(t), C) = 0$  para todo  $x \in U \cap D_1$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{dist}(\Phi_x(t), C) = 0$  para todo  $x \in U \cap D_2$ , donde  $D_1, D_2$  son las regiones conexas del plano limitadas por la curva de Jordan  $C$ .

*Demostración.* Se propone como ejercicio (hay que usar la aplicación de Poincaré y el teorema de Poincaré-Bendixson).  $\square$

**Observación 9.14.** Recordemos que el Teorema 8.9, en el caso  $n = 2$ , nos ofrece una condición suficiente bastante útil para demostrar la estabilidad de un ciclo límite.

### 9.3. Problemas

**Problema 9.1.** Estudiar el sistema

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2 + \frac{3}{2}y^2) \\ y' = x + y - y(x^2 + \frac{1}{2}y^2), \end{cases}$$

y comprobar que tiene una órbita periódica no constante.

**Problema 9.2.** Considerar la ecuación de segundo orden  $x'' + h(x, x')x' + g(x) = 0$ , donde  $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ,  $g(x) = x^3$ . Probar que hay una órbita periódica no constante.

**Problema 9.3.** Considerar la ecuación  $x'' + p(x)x' + q(x) = 0$ . Probar que si  $p(x) > 0$  para todo  $x$  entonces no hay soluciones periódicas no constantes.

**Problema 9.4.** Estudiar si los sistemas siguientes tienen alguna solución periódica:

$$\begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + y(1 - 3x^2 - 2y^2), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + y^2 + x^3 \\ y' = -x + y + yx^2. \end{cases}$$

**Problema 9.5.** Dibujar los diagramas de fases de los sistemas cuyas expresiones en coordenadas polares son

$$\begin{cases} r' = r(r-1)(r-2) \\ \theta' = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} r' = r(r-1)^2 \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

**Problema 9.6.** Sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Supongamos que  $f$  admite una integral primera no constante en ningún abierto de  $\Omega$ . Probar que entonces  $f$  no tiene ningún ciclo límite.

**Problema 9.7.** Probar que si la región interior a una órbita periódica no constante de  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  está contenida en  $\Omega$  entonces dicha región contiene un punto de equilibrio.

**Problema 9.8.** Supongamos que  $\omega(x)$  es conexo y contiene una órbita periódica regular  $\mathcal{O}_y$ . Probar que  $\omega(x) = \mathcal{O}_y$ .

**Problema 9.9.** Probar que si  $\omega(x) \cap \alpha(x)$  contiene un punto regular, entonces  $\mathcal{O}_x$  es periódica no constante.

**Problema 9.10.** Una trayectoria  $\Phi(t, x)$  de un sistema  $y' = f(y)$  se dice que es *recurrente* si existe una sucesión  $t_k \rightarrow \pm\infty$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, x) = x$ . Probar que si  $f$  es un campo gradiente entonces  $f$  no tiene ninguna trayectoria recurrente que no sea constante. Probar que si el sistema es plano entonces o bien  $x$  es un equilibrio, o bien está contenido en una órbita periódica. ¿Qué ocurre en dimensiones  $n \geq 3$ ?

**Problema 9.11.** Demostrar el Teorema 9.12.

**Problema 9.12.** Demostrar la Proposición 9.13.



**Problema 9.13.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  campos vectoriales  $C^1$ . Supongamos que  $\langle f(x), g(x) \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , y que  $f$  tiene una órbita cerrada. Demostrar que  $g$  tiene un cero.

**Problema 9.14.** Sea  $H$  una integral primera de un campo  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

1. Si  $x$  está en un ciclo límite, probar que  $\nabla H(x) = 0$ .
2. Supongamos que  $x$  está en un compacto invariante sin puntos de equilibrio en el que  $\nabla H$  no se anula. Probar que  $x$  está en una órbita cerrada.

**Problema 9.15.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio doblemente conexo, y  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $\rho \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Probar que si  $\text{div}(\rho f)(x) \neq 0$  para todo  $x \in \Omega$  entonces el sistema  $x' = f(x)$  tiene a lo sumo una órbita cerrada.

**Problema 9.16.** Probar que el sistema

$$\begin{cases} x' = -y - x + (x^2 + 2y^2)x \\ y' = x - y + (x^2 + 2y^2)y \end{cases}$$

tiene exactamente una solución periódica no trivial.



## Apéndice A

# Apéndice: Funciones de Lipschitz

En el capítulo 2 vimos cómo la condición de que una función  $f(t, x)$  sea localmente Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de  $t$ , nos permite asegurar la existencia y unicidad locales del PVI  $x'(t) = f(t, X)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . En este Apéndice revisaremos diversos resultados que nos permitirán averiguar cuándo una función es Lipschitz, y estimar su constante de Lipschitz.

### A.1. Propiedades generales de las funciones de Lipschitz

**Definición A.1.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función entre dos espacios métricos. Se dice que es de Lipschitz si existe una constante  $L \geq 0$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

para todos  $x, y \in X$ . Se dice también, cuando se cumple esta condición, que  $f$  es  $L$ -Lipschitz. Si esta condición se cumple para todos los  $x, y$  de un subconjunto  $A$  de  $X$ , diremos que  $f$  es  $L$ -Lipschitz en  $A$ . Esto, obviamente, equivale a decir que la restricción de  $f$  a  $A$  es  $L$ -Lipschitz (cuando en  $A$  se considera la distancia de  $X$  restringida a  $A$ ). Al menor de todos los números  $L$  con esta propiedad se le llama la constante de Lipschitz de  $f$ , y se denota  $\text{Lip}(f)$ . Es decir,

$$\text{Lip}(f) := \inf\{L \geq 0 : d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \text{ para todos } x, y \in X\}.$$

Es fácil ver, usando las propiedades de los supremos y los ínfimos de conjuntos de números reales, que

$$\text{Lip}(f) = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

Por ejemplo, cualquier función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  que tenga derivada acotada es Lipschitz en  $\mathbb{R}$  (basta aplicar el teorema del valor medio). Más en general, tenemos que, si  $U$  es un abierto *convexo* de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y su gradiente está acotado por  $L$ , entonces  $f$  es  $L$ -Lipschitz en  $U$ . Ver la siguiente sección.

Otro ejemplo fundamental de función de Lipschitz es el valor absoluto en  $\mathbb{R}$ , o más en general cualquier norma en  $\mathbb{R}^n$ , ya que se tiene

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Ambos son ejemplos de *funciones distancia* (a subconjuntos de un espacio métrico), que también son 1-Lipschitz.

**Ejemplo A.1.1.** Sea  $A$  un subconjunto no vacío de un espacio métrico  $X$ . La función distancia a  $A$ , definida por

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \quad x \in X,$$

es 1-Lipschitz.

*Demostración.* Fijados  $x, y \in X$ , y  $\varepsilon > 0$ , elijamos  $z = z(y, \varepsilon) \in A$  tal que

$$d(y, z) \leq d(y, A) + \varepsilon.$$

Entonces se tiene

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, A) - d(y, z) + \varepsilon \leq d(x, z) - d(y, z) + \varepsilon \leq d(x, y) + \varepsilon,$$

es decir,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) + \varepsilon,$$

de donde, haciendo tender  $\varepsilon$  a 0 deducimos  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ . Intercambiando los papeles de  $x$  e  $y$  se tiene también  $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$ , luego concluimos que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

□

Para probar que una función con valores en  $\mathbb{R}^m$  es de Lipschitz basta ver que sus funciones componentes lo son.

**Proposición A.1.1.** Sea  $X$  un espacio métrico, y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función. Denotemos  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  para cada  $x$ ; es decir  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  son las funciones componentes de  $f$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es de Lipschitz.
2. Para cada  $j = 1, \dots, m$ , la función  $f_j$  es de Lipschitz.

*Demostración.* (1)  $\implies$  (2) es consecuencia de la desigualdad

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq \left( \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right)^{1/2} = d(f(x), f(y)) \leq \text{Lip}(f) d(x, y).$$

En particular  $\text{Lip}(f_j) \leq \text{Lip}(f)$  para cada  $j$ .

(2)  $\implies$  (1): es consecuencia de que

$$d(f(x), f(y)) = \left( \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^m \text{Lip}(f_i)^2 d(x, y)^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^m \text{Lip}(f_i)^2 \right)^{1/2} d(x, y).$$

En particular  $\text{Lip}(f) \leq \left( \sum_{i=1}^m \text{Lip}(f_i)^2 \right)^{1/2}$ . □

**Proposición A.1.2.** Sean  $X$  un espacio métrico, y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de Lipschitz. Entonces:

1.  $f + g$  es de Lipschitz.
2. Si  $f$  y  $g$  son acotadas,  $fg$  es de Lipschitz.
3. Si existe  $a > 0$  tal que  $|g(x)| \geq a$  para todo  $x \in X$ , entonces  $1/g$  es de Lipschitz. Si además  $f$  es acotada, entonces  $f/g$  es de Lipschitz.

*Demostración.* La desigualdad

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

implica (1), con  $\text{Lip}(f + g) \leq \text{Lip}(f) + \text{Lip}(g)$ . Para probar (2) escribimos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leq \\ &|g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq \|g\|_\infty |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty |g(x) - g(y)|, \end{aligned}$$

lo que implica que  $fg$  es Lipschitz, con

$$\text{Lip}(fg) \leq \|g\|_\infty \text{Lip}(f) + \|f\|_\infty \text{Lip}(g).$$

Finalmente, en las condiciones de (3) se tiene

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x)g(y)|} \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{a^2},$$

desigualdad que implica que  $1/g$  es Lipschitz, con

$$\text{Lip}\left(\frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{a^2} \text{Lip}(g).$$

Si además  $f$  es acotada, se deduce de esto y de (2) que  $f/g$  es Lipschitz, con

$$\text{Lip}(fg) \leq a \text{Lip}(f) + \frac{\|f\|_\infty}{a^2} \text{Lip}(g).$$

□

**Proposición A.1.3.** Si  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  son funciones de Lipschitz entre espacios métricos, entonces  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es de Lipschitz, con  $\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g)\text{Lip}(f)$ .

*Demostración.* Se tiene  $d(g(f(x)), g(f(y))) \leq \text{Lip}(g) d(f(x), f(y)) \leq \text{Lip}(g) \text{Lip}(f) d(x, y)$ . □

**Ejemplo A.1.2.** Combinando los resultados anteriores es inmediato probar, por ejemplo, que la función

$$f(x, y) = \left( \text{sen}(|xy + 1|), \frac{|\cos x| + e^{|y|}}{\text{sen}^2(xy) + \cos^4(xy)} \right)$$

es de Lipschitz en cualquier conjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$ .

## A.2. Estimación de la constante de Lipschitz por medio de la derivada

Las funciones de Lipschitz tienen relaciones muy estrechas con las funciones que son derivables *en muchos puntos* y poseen derivadas uniformemente acotadas en dichos puntos.

Por una parte, hay un resultado importante debido a Rademacher que nos dice que las funciones de Lipschitz en  $\mathbb{R}^n$  son diferenciables en casi todo punto. No demostraremos aquí este resultado dado que la prueba no es elemental y no vamos a usarlo.

**Teorema A.2.1** (Rademacher). Si  $U$  es un abierto cualquiera de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es de Lipschitz, entonces el conjunto  $\{x \in U : f \text{ no es diferenciable en } x\}$  tiene medida cero.

Además, la derivada de una función de Lipschitz, en los puntos donde exista, siempre está acotada por la constante de Lipschitz.

**Proposición A.2.2.** Si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de Lipschitz y  $f$  es diferenciable en  $x$ , entonces

$$\|Df(x)\| := \sup_{|v|=1} \|Df(x)(v)\| \leq \text{Lip}(f).$$

*Demostración.* Se tiene  $\|f(x + tv) - f(x)\| \leq \text{Lip}(f) \|tv\| = \text{Lip}(f) |t|$  si  $\|v\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , de donde

$$\|Df(x)(v)\| = \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right\| \leq \text{Lip}(f).$$

□

La proposición anterior también proporciona un criterio negativo bastante útil en la práctica, ya que su prueba muestra en particular que si  $f$  es Lipschitz entonces todas sus derivadas parciales, cuando existan, están acotadas por  $\text{Lip}(f)$ . Por tanto, para probar que una función diferenciable en  $U$  no es Lipschitz, basta encontrar una derivada parcial de  $f$  y una sucesión en  $U$  a lo largo de la cual el valor absoluto de dicha derivada parcial tienda a infinito.

Por otra parte, si una función es diferenciable y tiene derivada acotada en un abierto convexo, entonces es de Lipschitz; esto es una consecuencia sencilla del teorema del valor medio que recordamos a continuación.

**Proposición A.2.3.** *Si  $U$  es un abierto convexo<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y su gradiente está acotado por  $L$ , entonces  $f$  es  $L$ -Lipschitz en  $U$ .*

*Demostración.* En efecto, para cada  $x, y \in U$ , si denotamos  $[x, y]$  el segmento que une  $x$  con  $y$ , se tiene por hipótesis que  $[x, y] \subset U$ , y aplicando el teorema del valor medio obtenemos que existe un  $\xi \in [x, y]$  tal que

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(\xi), y - x \rangle,$$

de donde

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in U} \|\nabla f(z)\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|.$$

□

Se deduce entonces de este resultado y de la demostración de la Proposición A.1.1 lo siguiente.

**Corolario A.2.4.** *Si una función  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida en un abierto convexo tiene derivadas parciales acotadas en  $U$ , entonces  $f$  es Lipschitz, y de hecho*

$$\text{Lip}(f) \leq \left( \sum_{j=1}^m \sup_{z \in U} \|\nabla f_j(z)\|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sup_{z \in U} \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(z) \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Este resultado puede hacerse más preciso usando la siguiente *desigualdad del valor medio* (recuérdese que el teorema del valor medio no es cierto para funciones con valores vectoriales).

**Teorema A.2.5** (Desigualdad del valor medio). *Sea  $U$  un conjunto abierto y convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en  $U$ . Entonces, para cada  $x, y \in U$  existe  $c \in [x, y]$  tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df(c)(y - x)\| \leq \|Df(c)\| \|x - y\|,$$

donde la norma considerada es la euclídea.

*Demostración.* Pongamos  $h = y - x$ ,  $u = f(y) - f(x)$ . Como  $U$  es convexo, el segmento  $[x, y]$  está dentro de  $U$ . Definamos  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  por

$$g(t) = \langle u, f(x + th) \rangle.$$

Es claro que  $g$  es diferenciable, con

$$g'(t) = \langle u, Df(x + th)(h) \rangle.$$

Por el teorema del valor medio, existe  $\theta \in [0, 1]$  tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\theta),$$

<sup>1</sup>Conviene advertir que el resultado anterior es en general falso si  $U$  es conexo pero no convexo. Pueden incluso construirse abiertos conexos acotados  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  y funciones  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  tales que  $\|\nabla f\|$  está acotada en  $U$  mientras que  $f$  no lo está.

es decir,

$$\langle u, f(y) - f(x) \rangle = \langle u, Df(x + \theta h)(h) \rangle.$$

Por tanto, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|^2 &= \langle u, f(y) - f(x) \rangle = \langle u, Df(x + \theta h)(h) \rangle \leq \\ & \|u\| \|Df(x + \theta h)(h)\| = \|f(y) - f(x)\| \|Df(x + \theta h)(h)\|, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado cancelando  $\|f(y) - f(x)\|$  y poniendo  $c = x + \theta h$ . □

Recuérdese que  $\|Df(c)\|$  se define como

$$\|Df(c)\| = \sup_{\|v\|=1} \|Df(c)(v)\|,$$

y que en general la norma de una aplicación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es

$$\|T\| := \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\|;$$

es decir,  $\|Df(c)\|$  es simplemente la norma de la aplicación lineal  $Df(c) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Combinando el teorema anterior con la Proposición A.2.2 se deduce fácilmente lo siguiente.

**Corolario A.2.6.** *Sea  $U$  un conjunto abierto y convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en  $U$ . Entonces  $f$  es de Lipschitz en  $U$  si y sólo si la función derivada  $Df$  está acotada en  $U$ . En tal caso se tiene además que*

$$Lip(f) = \sup_{z \in U} \|Df(z)\|.$$

Sin embargo, el cálculo exacto de la norma de una aplicación lineal (y en particular el de la norma de  $Df(z)$  para cada  $z \in U$ ) resulta bastante difícil en la práctica cuando  $n, m \geq 2$ , como veremos en la siguiente sección. Por tanto, salvo en casos especiales, no resulta aconsejable aplicar el corolario anterior, ni tampoco fatigarse en el cálculo de constantes de Lipschitz exactas. En la mayoría de las aplicaciones una estimación razonablemente buena de la constante de Lipschitz es suficiente, y eso puede hacerse usando directamente el Corolario A.2.4, o incluso la siguiente consecuencia inmediata de éste.

**Corolario A.2.7.** *Si una función  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida en un abierto convexo tiene derivadas parciales acotadas en  $U$  por una constante  $M$ , entonces  $f$  es Lipschitz, y de hecho*

$$Lip(f) \leq \sqrt{nm}M.$$

Una versión de este Corolario para funciones del tipo  $f(t, x)$  como las que consideramos en el capítulo 2 es la siguiente.

**Corolario A.2.8.** *Sean  $U$  un abierto convexo de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua, que denotamos  $f(t, x)$ . Si  $f$  es diferenciable respecto de la variable  $x$ , y además existe  $M \geq 0$  tal que*

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, x) \right| \leq M$$

para todo  $(t, x) \in I \times U$ , entonces  $f$  es Lipschitz en la variable  $x$ , uniformemente respecto de  $t$ , en el conjunto  $I \times U$ ; de hecho

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \sqrt{nm}M \|x - y\|$$

para todos  $x, y \in U, t \in I$ .

*Demostración.* Basta aplicar el corolario anterior a la función  $U \ni x \mapsto g_t(x) := f(t, x)$ , para cada  $t \in I$ . □

### A.3. Cálculo de la norma de una aplicación lineal

Recordemos que la norma de una aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se define como

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (\text{A.1})$$

Esta definición puede parecer algo extraña a primera vista; después de todo  $A$  viene determinada por una matriz  $n \times m$ , y el espacio de tales matrices es isomorfo a  $\mathbb{R}^{nm}$ , con lo cual podría parecer más natural identificar el espacio de estas matrices con  $\mathbb{R}^{nm}$  y definir la norma de  $A$ , representado por la matriz  $(a_{ij})$ , como la norma del vector  $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{mn})$  de  $\mathbb{R}^{nm}$ . Una enorme desventaja (y no la única) de esta posible definición es que entonces la norma de  $A$  dependería de las bases elegidas en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ . Una virtud de la definición (A.1) es que  $\|A\|$  sólo depende de  $A$  y de las normas fijadas en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ . Esta definición también tiene muchas otras ventajas de carácter geométrico y analítico, las cuales no vamos a entrar a discutir ahora.

Por supuesto, la definición (A.1) también tiene un inconveniente evidente y fundamental: fijada una aplicación lineal  $A$ , con matriz  $(a_{ij})$  respecto de las bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , no es en absoluto claro cómo calcular  $\|A\|$  en función de  $(a_{ij})$ . Hallar máximos de normas de aplicaciones no es fácil, ni siquiera cuando éstas son lineales y el conjunto sobre el que se quieren maximizar es una esfera euclídea.

A continuación presentamos un método que permite calcular  $\|A\|$  en el caso en que en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  consideremos la norma euclídea (para otras normas diferentes de la euclídea, la tarea puede resultar aún mucho más complicada).

Recordemos que si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal, su traspuesta se define como la única aplicación  $A^t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\langle x, A^t y \rangle = \langle Ax, y \rangle.$$

Si  $A$  tiene matriz  $(a_{ij})$  respecto de las bases canónicas, entonces  $A^t$  tiene por matriz, respecto de las mismas bases, la matriz traspuesta  $(a_{ji})$  (es decir, la matriz obtenida al cambiar filas por columnas en la matriz de  $A$ ). Es inmediato que

$$B := A^t A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es una aplicación lineal simétrica, y por tanto es diagonalizable. Observando que

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^t Ax \rangle = \langle x, Bx \rangle,$$

se deduce que

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \left( \max_{\|x\|=1} \langle x, Bx \rangle \right)^{1/2}.$$

Por tanto hemos reducido el problema a calcular la raíz cuadrada del máximo, en la esfera unidad, de la forma bilineal simétrica

$$x \mapsto g(x) := \langle x, Bx \rangle$$

(que es en general semidefinida positiva). Esto puede hacerse usando el teorema de los multiplicadores de Lagrange: es fácil ver que

$$\nabla g(x) = 2Bx,$$

y según ese teorema, si ponemos  $h(x) = \|x\|^2 - 1$ , entonces el máximo de  $g$  en  $S := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$  se alcanza en puntos  $x \in S$  para los que exista algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla g(x) = \lambda \nabla h(x),$$

es decir

$$2Bx = \lambda 2x,$$

o equivalentemente

$$Bx = \lambda x.$$



Es decir, el máximo de  $g$  en  $S$  ha de alcanzarse en alguno de los autovectores  $v_0$  de  $B$  que están en la esfera unidad  $S$ . Si  $\lambda$  es el autovalor de  $B$  correspondiente a tal  $v_0$ , entonces el valor de dicho máximo será

$$g(v_0) = \langle v_0, Bv_0 \rangle = \langle v_0, \lambda v_0 \rangle = \lambda \|v_0\|^2 = \lambda.$$

Por otra parte, si  $\mu$  es cualquier otro autovalor de  $B$ , con autovector  $v \in S$ , entonces se tiene

$$\lambda = g(v_0) \geq g(v) = \langle v, Bv \rangle = \langle v, \mu v \rangle = \mu \|v\|^2 = \mu.$$

Esto prueba que

$$\max_{|v|=1} \langle x, Bx \rangle = \max\{\lambda : \lambda \text{ es autovalor de } B\}.$$

El siguiente resultado resume nuestros hallazgos.

**Teorema A.3.1.** *Sea  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación lineal, y consideremos  $B = A^t A$ ; entonces*

$$\|A\| = (\max\{\lambda : \lambda \text{ es autovalor de } B\})^{1/2}.$$

**Corolario A.3.2.** *En el caso especial en que  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sea simétrica, se tiene*

$$\|A\| = \max\{|\mu| : \mu \text{ es autovalor de } A\}.$$

*Demostración.* En este caso se tiene  $A^t A = A^2$ , y por tanto

$$\|A\| = (\max\{\lambda : \lambda \text{ es autovalor de } A^2\})^{1/2} = \max\{|\mu| : \mu \text{ es autovalor de } A\}.$$

□



# Bibliografía

La originalidad que puede tener un manual de estas características es escasa. En este caso se limita a algunas variaciones en pruebas y enunciados, a la selección y el orden de exposición de ciertos contenidos, y unos pocos ejercicios. Las referencias que hemos manejado con mayor intensidad durante la preparación de este texto son las siguientes. Los dibujos están basados en algunas figuras de los libros [1, 2, 7, 10].

- [1] H. Amann, *Ordinary Differential Equations—An Introduction to Nonlinear Analysis*, De Gruyter, 1990.
- [2] V. Arnold, *Equations Différentielles Ordinaires*. Ed. Mir, Moscú, 1974.
- [3] D. Azagra, *Cálculo Diferencial*, Universidad Complutense 2015.  
Disponibile en <https://www.mat.ucm.es/~dazagrar/docencia/cd2015.pdf>
- [4] C. Fernández-Pérez, *Ecuaciones diferenciales I. Ecuaciones Lineales*, Ediciones Pirámide, 1992.
- [5] C. Fernández-Pérez y J.M. Vegas-Montaner, *Ecuaciones Diferenciales-II*, Ediciones Pirámide, 1996.
- [6] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [7] M. Hirsch, and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [8] F. Macià, *Ecuaciones diferenciales*, 2007.  
Disponibile en <https://dcain.etsin.upm.es/~fabricio/Docencia.html>
- [9] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*. Springer Verlag, New York, 1977.
- [10] G. Teschl, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, American Mathematical Society, 2012.
- [11] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1993.