Entrevista radiofónica ficticia

Daniel Azagra

12 de septiembre de 2013

ENTREVISTADOR: Profesor Azagra, sabemos que está usted muy ocupado y que la preparación de esta actividad le está dando muchos quebraderos de cabeza. ¿Por qué aceptó dar una conferencia sobre la relación entre la música y las matemáticas si en realidad no había reflexionado lo suficiente sobre el tema?

DANIEL AZAGRA: La oferta me pilló en un momento tonto. [*Risas*] En serio, es un tema que me ha intrigado desde la adolescencia, cuando estudiaba música en el conservatorio y matemáticas en el instituto, y sobre el que he pensado bastante, pero sin hablar de ello con nadie, de una manera muy autista. Me apetecía hacer el esfuerzo de verbalizar mis pensamientos, quizá incluso ponerlos por escrito, y confrontarlos conmigo mismo y con una audiencia, para ver si se sostienen o bien son tonterías que carecen de interés y fundamento.

E.: ¿Y a qué conclusión ha llegado?

D.A.: Pues en realidad aún no lo sé, estos días he estado pensando aún más sobre el tema, y creo que no son tonterías del todo y que merece la pena escribir y hablar de ello, pero la verdad es que esta entrevista será el primer esfuerzo serio en ese sentido. A ver si usted puede ayudarme un poquito.

E.: Bueno, yo estoy aún mucho más lejos de ser un experto de lo que pueda estarlo usted, me da la impresión de que es un tema bastante complejo y con vertientes diferentes que pueden analizarse también de formas diferentes, desde lo más práctico a lo más especulativo. En una primera aproximación al tema, ¿cuál diría usted que es la relación más evidente entre las dos disciplinas?

D.A.: Que las dos son artes. Y que de todas las artes, en muchos sentidos están más cerca una de otra que de todas las demás.

E.: Es curioso que diga eso. Que la música se considera un arte es una obviedad, nadie lo va a discutir. Sin embargo, decir que las matemáticas son también un arte me parece bastante osado. La mayoría de la gente seguramente piensa que es una disciplina árida y fría, una ciencia dura y abstrusa, algo que no solamente no englobarían en las artes, sino que situarían en sus antípodas.

D.A.: Efectivamente, la mayoría de la gente seguramente tiene esa impresión porque las matemáticas usan un lenguaje abstracto que resulta incomprensible para el que no es matemático (e incluso a veces también para los propios matemáticos si no están familiarizados de antemano con el tema del que se trata). Sin embargo, en mi opinión, las matemáticas tienen tanto de ciencia como de arte. Las matemáticas comenzaron intentando dar respuestas a problemas concretos de la vida cotidiana, del comercio, la agricultura, etc, y poco a poco desarrollaron un lenguaje propio que permitió abordar con gran éxito muchos otros problemas relacionados con la comprensión del mundo o incluso el universo en que vivimos, hasta el punto de que desde hace ya varios siglos resulta imposible no ya hacer, sino incluso imaginar, ciencias como la física o la química desprovistas de lenguaje matemático. De la mano de la física y otras ciencias este lenguaje se fue haciendo más y más sofisticado, y ha acabado dando lugar a un universo ideal propio de las matemáticas (que por cierto, al igual que el universo físico en que vivimos, está en expansión, continuamente aparecen nuevos conceptos, teorías y relaciones entre ellos). Un universo ideal en el que muchas veces se abordan problemas ya sin relación directa aparente con la física o con ningún aspecto concreto del mundo real. Y digo aparente porque muchas veces ha ocurrido, como con el caso de las geometrías no euclídeas, que las soluciones a problemas matemáticos que en su momento parecía que no tenían ninguna conexión con las otras ciencias (y que por ello en primera instancia fueron de interés exclusivo del matemático), a la postre se revelaron como herramientas idóneas o incluso esenciales para el tratamiento de los nuevos desafíos de las ciencias naturales.

En ese universo ideal se plantean preguntas que al matemático le parece natural hacerse a la vista del paisaje que se despliega ante sus ojos. Para intentar responderlas, los únicos experimentos que el matemático puede hacer son mentales (aunque hoy en día también se puede ayudar del ordenador), y el objetivo de estos experimentos mentales es distinguir lo que es verdad de lo que no lo es, encontrar verdades útiles o bellas (que suelen llamarse *teoremas*), o bien refutar afirmaciones que parece natural aventurar pero que en definitiva son falsas (lo que suele hacerse mediante la construcción de lo que se llama *contraejemplos*). Y cuando digo verdades útiles me refiero a que sean útiles dentro de la propia teoría matemática, no necesariamente útiles para el resto del mundo. La elaboración de estos experimentos mentales, con mucha suerte, lleva al descubrimiento de una demostración. La demostración, cuando no es rutinaria, es decir, cuando se trata de demostrar lo que llamamos un teorema, es el núcleo tanto del proceso creativo del matemático como de su proceso descubridor. Es creación e invención en tanto en cuanto muchas veces necesita inventar (o según se mire, descubrir) herramientas que permiten hacer cosas nuevas que hasta ese momento no se podían hacer.

Hay un viejo debate sobre si las matemáticas se inventan o se descubren, pero no me parece muy interesante entrar en este tema, porque en definitiva lo mismo puede decirse de todas las obras artísticas: hay tantos motivos para pensar que son creación como para pensar que son descubrimiento.

E.: [*Interrumpiendo*] ¿Podría explicar por qué opina esto último?

D.A.: Por varios motivos. Por ejemplo,y sólo le voy a dar este porque luego me servirá también para elaborar otro argumento: es fácil demostrar, como hizo Jorge Luis Borges en su cuento *La biblioteca de Babel*, que todas las obras literarias que un ser humano puede escribir o leer forman parte de una lista finita, aunque obviamente muy grande. El argumento combinatorio elemental de que hay una cantidad finita de maneras diferentes de distribuir un conjunto finito de caracteres a lo largo de una cantidad de páginas limitada por un número fijo (por ejemplo tantas páginas como caben en el universo, o tantas como podría leer el lector más rápido del mundo en, pongamos, cien mil billones de años) puede extrapolarse a todas las demás artes: usando notas musicales en lugar de letras del alfabeto resulta que hay una cantidad finita de obras musicales diferentes que pueden componerse o escucharse. Usando píxeles, o si se prefiere, moléculas de pigmentos diferentes, lo mismo puede decirse de las obras gráficas. Llegando al extremo, y admitiendo que el universo físico tiene un número finito de partículas indivisibles, como parece que es el caso, que podemos imaginar *pinchadas* en un número finito de agujeritos muy pequeños (como podemos suponer en la práctica, ya que las posiciones que en el espacio ideal de la físca disten menos de una fracción del diámetro de la partícula más pequeña son en la práctica indistinguibles), llegamos a que la cantidad total de *cosas* posibles en este universo, tanto físicas como mentales, es finita. Por cierto, esto nos lleva a una situación bastante paradójica, ya que las matemáticas asumen la existencia de los conjuntos infinitos, y acabamos de ver que en la naturaleza y en la mente humana no parece que haya ni pueda haber nunca algo infinito. El tema de las paradojas en las matemáticas es muy interesante y quizás podamos volver a él más adelante.

Pero yendo al grano, entonces, si hay sólo una cantidad finita de posibles sonatas, de posibles conciertos para piano, novelas, obras de teatro, obras cinematográficas, esculturas, pinturas, en definitiva de *cosas posibles*; si ningún creador podrá nunca escapar de esta prisión de la finitud, inventar algo que esté fuera de esa lista finita y preexistente (al menos de forma ideal) de posibles obras artísticas (o no artísticas), ¿puede decirse que esas obras se inventan en lugar de descubrirse? Yo creo que puede decirse una cosa tanto como la otra: inventar es muy parecido a saber buscar bien para obtener argumentos o herramientas nuevas, es decir, casi lo mismo que descubrir (esto por supuesto cuando el descubrimiento no es azaroso, sino basado en la intuición y la razón). Hay una propensión a usar la palabra descubrimiento para describir hallazgos científicos y la palabra invención en relación a las obras literarias, musicales, etc, pero en mi opinión, y al menos cuando se trata de ciencias como las matemáticas o la física teórica, la distinción es irrelevante. También parece que el concepto de invención está más ligado a una finalidad, es decir, el que inventa descubre algo que le permite hacer más o menos lo que quería cuando se puso a buscar, y el descubridor tal vez descubre algo a su pesar, incluso lo contrario de lo que esperaba, como el matemático que comienza tratando de demostrar un teorema y acaba construyendo un contraejemplo, o al revés. Pero ya he dicho que este debate no me interesa mucho, y además nos está alejando del tema de la entrevista.

E.: Ya veo, perdón por la interrupción. Estaba usted hablando sobre el mundo ideal del matemático.

D.A.: Sí, lo que quería decir es que en ese mundo ideal del matemático hay también belleza y fealdad y que, como en el caso de cualquier otro arte, la creatividad y la imaginación y (por supuesto también el trabajo duro) son el eje central de toda realización digna de reconocimiento. En el núcleo del acto creador matemático puede haber tanta búsqueda, imaginación y apasionamiento como en el de un pintor o un músico. Sin embargo el matemático, por ser también un científico, está obligado a mostrar su trabajo envuelto en un lenguaje muy preciso que a los no iniciados les resulta totalmente incomprensible, y a los iniciados, como ya he dicho antes, muy difícil de asimilar. Ningún matemático puede leer de corrido un texto de matemáticas sobre una materia por él desconocida hasta ese momento como haría con una novela; ni siquiera más pausadamente como haría con un poema. Se necesita mucho más tiempo: para entender de verdad una realización matemática no basta con estar familiarizado con su lenguaje, hay que ir mucho más allá, hay que trascender ese lenguaje abstracto y generar en nuestra mente una red propia de ideas, herramientas y maquinaria intelectuales, que permitan superar ese envoltorio del lenguaje formal matemático, para llegar a redescubrir las ideas e intuiciones que hubo en el origen de esa realización, recreando así en nuestro mundo interior el descubrimiento o invención que ese otro matemático nos ha legado en su texto. Es sólo entonces cuando el lector matemático está en disposición de apreciar hasta qué punto esas ideas e intuiciones son valiosas y se plasman con mayor o menor eficiencia y arte en la obra que tiene en sus manos.

En esto radica la diferencia principal con las otras artes: para apreciar el arte de las matemáticas, hasta cierto punto hay que ser un matemático, o al menos alguien que podría llegar a serlo, mientras que las artes tradicionales están por lo general dirigidas a todos (o casi todos) los públicos. Por supuesto, un músico siempre apreciará mejor la obra de otro músico, y un novelista la de otro novelista, aunque quizás las disfrute menos de lo que lo haría si fuera menos experto en su disciplina, porque la inevitable evaluación racional del buen o mal oficio del colega puede interferir mucho en el goce estético primario de la obra en cuestión.

E.: Pero entonces, si entiendo bien su punto de vista, extrapolándolo al ámbito de la construcción de objetos, por ejemplo también un motor, una bicicleta o un barco muy bien hechos pueden ser una obra de arte a los ojos de un ingeniero, mientras que para el resto del mundo sólo son cosas. Me parece que tiene usted unas ideas bastante heterodoxas sobre el arte.

A.: Gracias por el cumplido, a ortodoxia es muy aburrida. [*Risas*] Efectivamente, admito encantado que en todos los ámbitos de la creación de objetos existen obras de arte. Si uno es ingeniero industrial, por ejemplo, sin duda en algún momento de su carrera se encontrará con motores u otros objetos que, cuando comprenda bien cómo están hechos, le dejarán con una sensación de maravilla comparable a la que le puede proporcionar una obra maestra del arte pictórico colgada en un museo. A nosotros nos dejará fríos porque no conocemos el *lenguaje* de la ingeniería. ¿Puede afirmarse que los motores no pueden ser obras de arte? Sería como decir que las obras maestras de la literatura china no son arte simplemente porque desconocemos ese idioma. Pero es que, por ejemplo, incluso sin ser ingeniero naval, un barco muy bien hecho, con un diseño exquisito y unas prestaciones sorprendentes, yo creo que despierta más emociones artísticas en cualquier ser humano normal que uno de esos lienzos de Mark Rothko todos de un mismo color o de dos colores separados por una línea que hay por ahí colgados en salas de museos muy importantes. Y esto lo digo totalmente en serio, no es una provocación, se trata de sentido común.

No obstante creo que estoy divagando demasiado, estoy enfocando el tema desde un punto de vista demasiado especulativo. Usted me ha preguntado cuál es la relación más evidente entre las dos disciplinas, música y matemáticas, y lo primero que me he sentido obligado a decir es eso: que creo que la matemática también es un arte para los que conocen su lenguaje.

E.: También ha dicho, o así lo he entendido, que piensa que en algunos sentidos la relación entre la música y las matemáticas es más estrecha que entre la música y cualquier otro arte. ¿Puede explicar por qué?

D.A.: Una explicación precisa y profunda está fuera de mi alcance en estos momentos, pero puedo tratar de dar algunos indicios. En primer lugar, las dos disciplinas usan lenguajes abstractos y universales, y son las únicas que lo vienen haciendo más o menos desde que el ser humano tomó conciencia de su existencia (por ejemplo a las artes plásticas les costó muchos siglos más llegar a la abstracción, y la literatura nunca lo conseguiría sin destruirse a sí misma antes de convertirse en otra cosa). La habilidad para combinar y manipular objetos abstractos, jugar con ellos para obtener los resultados deseados, resulta esencial tanto en el quehacer matemático como en el músical.

Permítame poner un ejemplo: si a J.S. Bach le viene a la cabeza un tema musical, no se conforma con escribir la melodía e indicar por debajo unos cuantos acordes de acompañamiento para rasgarlos en una guitarra, él quiere hacer algo mucho más elaborado, de gran complejidad intelectual, y para ello sigue rigurosamente unas reglas que se impone a sí mismo, más reglas y más rigurosas aún de lo que la tradición musical de su tiempo le exige. Quiere que todas las voces instrumentales (o incluso todas las voces dentro de un mismo instrumento polifónico, como cuando compone *El clave bien temperado*) tengan intervenciones más o menos interesantes, que tengan algo bonito que decir, nunca reducirse a acompañar a la voz principal, aunque por supuesto también deben acompañarla; que haya juegos entre las voces, imitándose y respondiéndose unas a otras, haciendo reflejos y persecuciones. Esto es lo que en música se llaman las técnicas del contrapunto y fuga. Y todo ello asegurándose de que ese acompañamiento *suene bien*, para lo que sigue las reglas de la armonía clásica de su época. Es muy fácil, algo casi automático cuando se saben las reglas, el hacer contrapunto (por ejemplo cánones y fugas), siempre que uno prescinda de la armonía. Pero si se quiere conseguir que esos cánones o fugas tengan melodías interesantes y que el conjunto de todas las voces o partes instrumentales suene bien, el proceso es realmente muy complejo. Para lograr que suene bien, en el sentido de la música clásica, además de las reglas del contrapunto hay que seguir las reglas de la armonía, reglas que prohiben ciertos movimientos de voces, como octavas o quintas paralelas, o ciertas secuencias de acordes, y recomiendan otros. También hay que saber cuándo uno puede ignorar o romper alguna regla para lograr un efecto especial. En cierto modo es como un juego, pero un juego en el que las nociones de pérdida o ganancia resultan mucho más difusas. Si siguiendo esas reglas que te imponen o te impones a ti mismo logras algo parecido a lo que deseabas en el punto de partida, que te gusta y que le gusta a tu público, se podrá decir que has ganado. Como en todo juego interesante (bien con reglas complicadas, o bien con reglas más o menos simples pero que generen un amplio abanico de posibles elecciones, como por ejemplo el ajedrez), el conseguir buenos resultados depende tanto de la experiencia e intuición desarrolladas al haber jugado durante muchos años como del esfuerzo mental de evaluar una gran cantidad de opciones posibles en cada momento y elegir la mejor. El proceso es muchas veces circular, porque lo que en un momento te parece más adecuado en términos expresivos, cuatro compases después puede resultar catastrófico en términos formales, y entonces tienes que reevaluar esa decisión y seguir otro camino. Este proceso creativo y combinatorio es en el fondo bastante parecido al que experimenta un matemático cuando está tratando de demostrar un teorema, o un gran maestro de ajedrez tratando de vencer a su oponente.

Por supuesto, esta obligación de tener que considerar una gran gama de posibles decisiones en cada momento, imaginar que se escoje una, anticipar lo que puede pasar un tiempo después y reevaluar cada decisión imaginaria en función del posible resultado posterior no es exclusiva de matemáticos, músicos o ajedrecistas. Cualquier trabajo con suficiente complejidad intelectual, como el de un médico, o un abogado, o un escritor, etc, conlleva este tipo de análisis. Sin embargo, en todos estos casos las situaciones a analizar son objetos, hechos, acciones que ocurren o podrían ocurrir bien en el mundo real, o bien en el mundo imaginario pero al fin al cabo más o menos racional de una novela (aunque en la prosa novelística las reglas, si las hay, son mucho menos rígidas), mientras que en el caso del músico o del matemático, se trata de manipular objetos abstractos que no tienen conexión directa con el mundo real.

En muchos sentidos el lenguaje del músico es aún mucho más abstracto que el del matemático, puesto que tanto los objetos que manipula como el resultado de dicha manipulación no poseen ningún significado racional. ¿Qué significa la nota de *la bemol* situada un semitono por debajo del la 440? Nada. ¿Qué significa un acorde de séptima de dominante sobre la nota *do*? Poco más que nada. ¿Qué significa la cuarta balada de Chopin? Algo significa, por supuesto, para su compositor y sus intérpretes, que convivieron y conviven con ella, y para las personas que la están escuchando en un momento dado, pero ese significado no es racionalizable ni objetivo. Su significado (si es que realmente puede hablarse del mismo, si por ejemplo convenimos que *significado* significa en este caso el conjunto de impresiones auditivas y emocionales que la escucha de la obra desencadena en el oyente) no puede verbalizarse en ningún idioma conocido. Es algo irracional, y también subjetivo e inestable, puesto que con seguridad varía de oyente a oyente e incluso varía en un mismo oyente según las circunstancias del momento de su escucha. En contraposición, las obras matemáticas sí que tienen un significado racional y muy objetivo, aunque indudablemente abstracto. El matemático usa símbolos para abreviar fórmulas y conceptos, pero estas abreviaturas no son realmente necesarias para exponer el enunciado de un teorema. Un teorema sí que puede verbalizarse en cualquier idioma si al diccionario de ese idioma se le añaden las definiciones y conceptos matemáticos específicos necesarios para entender el teorema. Por ejemplo, si yo digo que *toda función continua en un espacio compacto tiene un máximo absoluto*, y previamente explico lo que es una función, lo que es la continuidad de una función, lo que es un espacio compacto, y lo que es un máximo absoluto, estoy usando el lenguaje natural para transmitir el contenido de un teorema referente a las propiedades de ciertos objetos abstractos que no existen en la realidad pero que sí pueden llegar a describirse usando el lenguaje natural, como por ejemplo uno puede hacer con los unicornios, aunque los objetos matemáticos sean bastante más difíciles de imaginar por lo general que los unicornios. Por contra, lograr algo parecido en el caso de una obra musical resulta inconcebible.

Dejando de lado esta importante diferencia en cuanto a la racionalidad de las matemáticas y la irracionalidad de la música (aunque espero que luego me permita volver sobre esta cuestión para darle una vuelta de tuerca), lo que me interesa subrayar en este momento es que el matemático y el compositor muchas veces hacen uso, en sus respectivos trabajos, de habilidades cognitivas bastante similares. Las similitudes no se limitan al hecho de tener que elegir en cada paso de la construcción de la obra (musical o matemática) la mejor de entre una gran cantidad de configuraciones de objetos abstractos y eventualmente tener que reevaluar las elecciones en función de lo que ocurra más adelante. Ni mucho menos: por ejemplo, en la teoría musical de la armonía y el contrapunto clásicos uno puede encontrar herramientas y técnicas muy parecidas a conceptos geométricos tales como simetrías, traslaciones, rotaciones, etc. Podría incluso decirse que, cuando un compositor hace uso de esas herramientas, en el fondo está haciendo geometría. El músico también hace uso, consciente o no, de otros conceptos matemáticos generales como por ejemplo el de *clase de equivalencia*: cuando se habla de un acorde de séptima de dominante no se habla de ningún acorde concreto, sino de todo un conjunto de acordes que tienen algo en común. Y por supuesto, tanto el matemático como el músico tienen que *contar y distribuir* cosas en el espacio o el tiempo, sean notas musicales en un compás, sean números o elementos de un conjunto, y a hacer operaciones aritméticas con ellos, aunque esto último es tan obvio que no tiene apenas interés el recordarlo.

E.: ¿Y qué hay del Análisis Matemático? Tengo entendido que usted es profesor de Análisis Matemático. ¿Ve alguna conexión especial entre el Análisis y la Música?

D.A.: Sí que hay una conexión muy especial entre ellos, y muy importante por sus consecuencias teóricas y prácticas; más particularmente entre lo que los matemáticos llaman el Análisis de Fourier (o también Análisis Armónico) y el fenómeno mismo del sonido y la teoría de la armonía en música. Y además también surgen paralelismos y contraparalelismos muy curiosos cuando uno hace la comparación de las respectivas evoluciones históricas de la música occidental y de las matemáticas. Puedo intentar explicar estas conexiones, aunque me llevaría algo de tiempo, quizá más del que llevamos ya hablando. ¿Quiere que prosiga?

E.: Sí, por favor.

D.A.: Muy bien. Permítame comenzar por tratar de explicar un poco el análisis matemático del fenómeno sonoro. El sonido son ondas producidas en el aire por la vibración de objetos, que en música suelen ser cuerdas, o columnas de aire, o membranas, etc. El aire reproduce en sus ondas la forma de vibrar de los objetos, y nuestro órgano auditivo reproduce la manera de vibrar del aire (y por consiguiente la del objeto original). A partir de ahí, es decir, el paso de las vibraciones en el oído a las excitaciones neuronales y las sensaciones mentales correspondientes, el fenómeno es mucho más difícil de explicar, pero de cara al asunto que me propongo analizar esto no tiene mucha relevancia. Los músicos saben, desde hace muchísimos siglos, de manera experimental, que cuando una cuerda vibra, emite un sonido que podemos llamar tono fundamental, con una frecuencia determinada que podemos llamar f, a la vez que una serie de sonidos más agudos, que se pueden llamar armónicos o sobretonos, y que tienen frecuencias $2f$, $3f$, $4f$, $5f$, etc, con diversas intensidades. Es decir, aunque todos los instrumentos de cuerda emiten estos sobretonos, no todos los sobretonos tendrán las mismas intensidades, esto dependerá de cada instrumento. La distribución de las intensidades relativas de los sobretonos es justamente lo que confiere a cada instrumento esa cualidad tan particular suya que llamamos *timbre*. Un piano y un violín pueden estar tocando a la vez la nota la de frecuencia 440 hercios, y si podemos distinguir el sonido del piano del del violín por su *timbre* es precisamente porque los armónicos o sobretonos de estos dos instrumentos son diferentes. En términos musicales, cuando uno toca la nota *do* de cualquier instrumento, si uno escucha bien puede oir también algunos de los sobretonos, que son, por este orden, otro *do* una octava por arriba, el siguiente *sol*, el siguiente *do* (ya dos octavas por arriba), el siguiente *mi*, el siguiente *sol*, el siguiente *si bemol*, los siguientes *do, re, mi, fa sostenido, sol, la bemol*, etc. Los sobretonos que se escuchan suenan más débiles pero con la misma frecuencia que si se pulsara o frotara la misma cuerda dividida en segmentos de la mitad, o un tercio, o un cuarto, etc, de la longitud original de la cuerda. La serie de armónicos en teoría es infinita, pero el oído humano no puede distinguir más que sonidos de hasta unos veinte mil hercios, de modo que en la práctica es finita. Además de esto la intensidad de los armónicos va decreciendo rápidamente, lo que significa que en la práctica el ser humano no puede oir (ni siquiera de forma inconsciente) más de 20 o 30 armónicos. El análisis matemático del sonido (y en realidad de cualquier fenómeno físico con carácter periódico) puede hacerse mediante lo que llamamos series de Fourier. Fourier fue el primer matemático en conjeturar (y sobre todo en usar sistemáticamente esta conjetura para resolver problemas de física matemática, como las ecuaciones de propagación del calor y las ondas) que cualquier función periódica de período p puede escribirse como una suma infinita de movimientos ondulatorios simples en forma de senos y cosenos, con diversos pesos o intensidades. Es decir, si f es una función periódica entonces

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{p}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{p}\right) \right],$$

para ciertos números $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ y $b_1, b_2, b_3, ...$, que se llaman *coeficientes de Fourier* de f. Fourier no fue capaz de demostrar su conjetura, entre otros motivos porque el concepto de función y de convergencia de una serie infinita de funciones a otra función no eran lo suficientemente precisos en su época. Digamos que los matemáticos de su época hacían matemáticas de una forma más intuitiva y menos rigurosa de lo que se hacen ahora (más adelante volveremos también sobre esta cuestión, que es muy interesante de cara a la discusión de los paralelismos entre las respectivas historias de la matemática y la música). Pero en definitiva, otros matemáticos (entre los cuales Dirichlet, Du Bois-Reymond, Kolmogorov, Hilbert y Carleson seguramente sean los que hayan tenido contribuciones más importantes en este problema) acabaron demostrando que, aunque en teoría Fourier estaba equivocado, a todos los efectos prácticos estaba en lo cierto.

Por ejemplo, cuando se aplica el Análisis de Fourier al problema de la vibración en la direción vertical de una cuerda, descrito por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde t representa el tiempo, x la dimensión horizontal y $u(t,x)$ la altura de la cuerda en tiempo t y lugar x, se llega a que $u(t,x)$ viene dada por una fórmula del tipo siguiente:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{nc\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{nc\pi}{L} t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} t\right),$$

es decir, $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, con

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\left(\frac{nc\pi}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{nc\pi}{L}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}t\right),$$

donde los A_n y B_n son números que dependerán de si la cuerda se pinza, se golpea o se frota, del lugar de la misma donde esto se hace, etc; el número L es la longitud de la cuerda; $c = \sqrt{T/\rho}$, donde T es la tensión de la cuerda y ρ su densidad. A la onda $u_1(t,x)$ se le llama tono fundamental (o primer armónico) de la cuerda vibrante, y a las ondas $u_n(x,t)$, $n = 2, 3, 4, ...$ se les llama sobretonos o armónicos de orden n. Los números A_1 y B_1 nos dicen la intensidad del tono fundamental de la vibración de la cuerda, y los A_n y B_n, con $n = 2, 3, 4, ...$ determinan las intensidades de los sobretonos subsiguientes, y como ya hemos indicado antes confieren al sonido emitido su timbre característico. Estos armónicos se modifican después al reflejarse en la tabla o caja armónica del instrumento particular que estemos considerando, que actúa como un filtro, potenciando algunos armónicos y amortiguando otros. Es decir, que al final la distribución de intensidades relativas de los armónicos en los que puede descomponerse el sonido que escuchamos no es la misma que la del sonido directo de la cuerda, pero esto no altera el hecho fundamental de que el sonido que nos llega es una superposición de armónicos de diversos órdenes con diversas intensidades relativas, que es lo que confiere a dicho sonido su cualidad particular o timbre. La consecuencia práctica de todo esto es que *cualquier sonido* (que en su tratamiento físico-matemático en definitiva es una función) se puede codificar matemáticamente mediante una serie infinita de números. Pero como el oído humano (y cualquier oído) tiene sus limitaciones, en la práctica una cantidad finita de números basta para codificar cualquier sonido: el de un saxofón, el de un violonchelo, la mezcla de los dos o incluso una orquesta completa con toses del público incluídas: todos estos sonidos se puede codificar mediante una cantidad finita (y no muy grande) de números. Este hecho tiene consecuencias de enorme importancia práctica: ni más ni menos, es la base de todos los sistemas modernos de grabación, edición y reproducción de música: el CD, el MP3, etc. Se llaman sistemas digitales precisamente porque toda la información sonora está codificada en una ristra de números.

E.: Disculpe que le interrumpa, pero hace un rato usted ha argumentado que absolutamente todo en este universo es finito, que todas las configuraciones posibles de objetos forman parte de una lista finita. De aquí parece fácil deducir que cualquier fenómeno físico debería poder describirse mediante una ristra finita de números, y entonces no entiendo muy bien por qué las teorías de Fourier son relevantes en este aspecto.

D.A.: Efectivamente, lo que usted dice se podría hacer en teoría: por ejemplo, especificando la posición de cada átomo de la cuerda (de entre una cantidad finita de posiciones posibles, ya que dos posiciones que idealmente estén más cerca que una fracción del diámetro de la partícula más pequeña son indistinguibles físicamente) y en intervalos de tiempo de, digamos 10^{-1000} segundos, o cualquiera que sea el margen de error del reloj atómico más preciso, tendríamos una descripción extremadamente precisa de la vibración de la cuerda. Pero, incluso suponiendo que fuera factible hacer esto (porque muy probablemente el objetivo rebasaría la capacidad de cálculo no sólo de cualquier ser humano sino también del supercomputador más potente), ello no nos serviría de nada, porque la ristra de números sería ininteligible, inmanejable e ineficiente.

El objetivo de la física-matemática no es sólo describir la solución de un problema físico con ayuda de las matemáticas, sino sobre todo el hacerlo de una manera inteligible y eficiente. Resulta curioso, y si se mira bien incluso bastante paradójico, que el asumir la existencia de conjuntos infinitos, de series infinitas, de las funciones seno y coseno, de los instrumentos de todo el análisis matemático, el cual no tendría sentido sin el concepto del infinito, tiene como recompensa que podamos obtener descripciones de nuestra realidad finita que son a la vez inteligibles, precisas y extremadamente eficientes. Por ejemplo, volviendo al problema de la cuerda vibrante, el saber que la vibración de una cuerda puede explicarse mediante una superposición de vibraciones elementales (armónicos) con diversos pesos o intensidades, nos permite obtener una descripción inteligible de dicha vibración, y usar nuestro entendimiento del problema para manipular la realidad con resultados satisfactorios: por ejemplo, especificar unas pocas decenas de armónicos bastan para caracterizar el timbre de un instrumento de forma lo suficientemente precisa como para *engañar* al oído humano. Una vez que uno dispone de esa lista de números, puede manipularla (en la práctica con la ayuda de un ordenador provisto de un software apropiado) para obtener diversos resultados: si por ejemplo uno quiere corregir una nota desafinada de un instrumento, bastará con desplazar la frecuencia de la nota fundamental emitida, subiéndola o bajándola hasta identificarla con la frecuencia de la nota correcta, y corregir también en la misma proporción y dirección la frecuencia de los armónicos correspondientes (pero manteniendo sus intensidades relativas), para obtener un sonido de igual timbre al original pero afinado.

E.: Así que las consecuencias prácticas de ese fenómeno físico armónico y de su análisis matemático son esas, quién lo iba a pensar... Antes ha mencionado usted que este fenómeno de los armónicos también tiene consecuencias en la propia teoría musical, y que pueden encontrarse paralelismos entre la evolución histórica de la música y la de las matemáticas. ¿Podría explicar a qué se refería?

D.A.: Permítame intentarlo. Sucede que cuantos más armónicos en común tienen dos sonidos o más, más consonantes nos parecen los intervalos que los separan o los acordes que forman al superponerlos (es decir, al tocar simultáneamente esas notas), y también, cuantos menos armónicos tienen en común, más disonantes nos parecen esos acordes. Esto ya fue observado hace muchos siglos por el matemático y músico Pitágoras. Por ejemplo un acorde con un intervalo de quinta justa (digamos *do-sol*) es muy consonante, mientras que uno formado por dos notas separadas por sólo un semitono (por ejemplo *do* y *do sostenido*) es extremadamente disonante. Este hecho le sirvió a Pitágoras para justificar la existencia de las notas que aparecen en las escalas y modos antiguos y clásicos: si uno va progresando por quintas a partir de la nota *fa*, por ejemplo, obtiene *fa, do, sol, re, la, mi, si*, que son las notas de las teclas blancas del piano y que cambiadas de orden forman las notas de la escala de do mayor. Pitagoras llegó a relacionar las proporciones entre las longitudes de las cuerdas que producen los diversos sonidos con algunos de sus descubrimientos en geometría y teoría de números, y a hacer de todo ello la base de una secta místico-religiosa.

En todo caso, y dejando la mística a un lado, el fenómeno del que partió Pitágoras está en la base de la teoría musical de la armonía. Por ejemplo, si uno considera los primeros armónicos que se producen sobre la nota *do*, obtiene un acorde del tipo *do, mi, sol, si bemol*, que es un acorde de séptima de dominante, uno de los más utilizados en la música clásica, y que cabe calificar de medianamente disonante (o medianamente consonante, según se mire y según el contexto musical de la época a la que nos refiramos), mientras que si nos quedamos con las notas *do, mi, sol*, obtenemos uno mucho más consonante. La armonía clásica es un juego constante de tensiones y de relajaciones de esas tensiones que involucran sucesiones de acordes más y menos disonantes, y la historia de la música occidental (por lo menos desde el Barroco hasta nuestros tiempos) ha evolucionado en la dirección de ir incorporando acordes cada vez más complejos o disonantes a las composiciones, lo cual, visto de otra manera corresponde a ir utilizando más y más notas de la serie armónica para construir acordes cada vez más sofisticados, o bien para incorporar notas extrañas como apoyaturas y retardos a otros acordes ya usados anteriormente, lo que en definitiva es otra cara de la misma moneda.

En este sentido puede decirse que la historia de la música clásica es un viaje hacia la disonancia, o también hacia el infinito de la serie armónica. Este *viaje armónico* ha tenido un final bastante explosivo. Después de obras del postromanticismo musical como las de *Tristán e Isolda* de Wagner, o de la *Noche transfigurada* de Schoenberg, los compositores de música clásica no han sabido o no han podido continuar por ese camino y en su mayoría lo han abandonado: por ejemplo, inventando otras reglas del juego, como el dodecafonismo de Schoenberg, en el que todas las notas de la escala cromática tienen la misma importancia y en cambio no importa tanto si los intervalos y acordes son consonantes o disonantes; o por ejemplo prescindiendo de las reglas de la armonía clásico-romántica, pero no de sus acordes, que combinan de modo más libre y adornan con escalas hexatónicas y pentatónicas para para producir nuevos efectos, como hacía Debussy. Se podría decir pues que la historia de la música clásica occidental, en cierto sentido, ha viajado desde la consonancia y el rigor hasta la disonancia (o el infinito) y la libertad.

Paralelamente las matemáticas también han hecho su propio viaje al infinito. El concepto del infinito siempre ha estado presente en las matemáticas, sin ir más lejos porque hay una cantidad infinita de números enteros, pero durante mucho tiempo se trató de evitar su uso actual (no así su uso potencial, como en los argumentos de inducción). Quizás fue el Análisis Matemático la disciplina que primero tuvo que lidiar con el problema de manejar el infinito, cuando tuvo que considerar las series infinitas cuya suma puede ser finita, los límites de funciones, y cuando en el siglo XVII Newton y Leibnitz introdujeron los conceptos de derivada e integral. En esos tiempos todos estos conceptos se manejaban de forma más o menos intuitiva, aunque no muy rigurosa. No sólo no había una definición precisa de límite de una función, o de suma de una serie infinita de funciones, sino que ni siquiera había una definición precisa y unánimemente aceptada de función. Hubo que esperar al siglo XIX para que matemáticos como Cauchy se ocuparan de ello. Cauchy fue uno de los primeros matemáticos en darse cuenta de que, conforme los problemas matemáticos iban sofisticándose, era muy importante manejar definiciones precisas y rigurosas de los objetos matemáticos para saber realmente de qué estaba uno hablando y evitar contradicciones y paradojas aparentes. Más tarde, cuando Cantor y otros matemáticos exploraron más de cerca los conjuntos infinitos, que ya los analistas venían manejando con despreocupación y soltura aparente, se dieron cuenta de que el manejo intuitivo de los conjuntos infinitos conducía rápidamente a contradicciones insolubles, verdaderas paradojas. Por ejemplo, a lo que se llama la paradoja de Russell: el conjunto de todos los los conjuntos que no son miembros de sí mismos, ¿es miembro de sí mismo? El remedio a la proliferación de estas paradojas vino dada por la construcción de una teoría de conjuntos con reglas muy precisas y rigurosas (que excluyen alusiones autoreferenciales como en el caso de la paradoja de Russell), y por la fundamentación de todas las ramas de la matemática en la teoría de conjuntos. Todos los objetos matemáticos que hasta entonces se habían manejado de forma intuitiva e independiente tuvieron que ser redefinidos en términos de conjuntos y manejados de acuerdo a reglas muy rígidas. Esto supuso una revolución importante, aunque no de tanto alcance como para llegar a invalidar los descubrimientos o invenciones del pasado, porque la inmensa mayoría de los argumentos propuestos por los grandes matemáticos para probar sus teoremas eran y siguen siendo argumentos muy sólidos, poco sensibles a los terremotos fundacionales.

En definitiva, la matemática partió de la finitud y la intuición para ir acercándose más y más al infinito y al rigor. Y una vez que llegó a este punto, surgieron otras paradojas, no reales, sino aparentes, que abrieron una puerta a la irracionalidad en el mundo de las matemáticas. Teoremas que contradicen nuestra intuición del mundo real, y que muestran que el mundo de las matemáticas quizá no es tan racional como parece a primera vista, que la matemática es tan rica como para dar cobijo en sus profundidades a monstruos de la razón. Permítame poner un ejemplo: hay un teorema matemático, vulgarmente conocido como la paradoja de Banach-Tarski, pero que no es una paradoja, sino un teorema verdadero y bien demostrado, y que dice que uno puede descomponer una esfera en cinco trozos y, moviendo los trozos mediante traslaciones y rotaciones (lo que se llaman movimientos rígidos, que no suponen deformaciones), agrupar por un lado tres de los trozos y por otro lado dos de ellos para acabar recomponiendo dos esferas disjuntas de igual tamaño al de la esfera original. ¡Es como decir que en matemáticas se pueden hacer milagros! Esto repugna a nuestra intuición, a nuestra idea del mundo tridimensional en que vivimos, porque tendemos a pensar que todos los conjuntos en este espacio tienen un volumen, que es invariante por rotaciones y traslaciones. Lo que nos dice este ejemplo es que en matemáticas hay conjuntos mucho más raros de lo que uno puede imaginar, tan extraños que no se les puede asignar un volumen de manera coherente. Este es un ejemplo donde aparece esa irracionalidad de las matemáticas a la que me refería antes.

Se podría decir pues que en el siglo XIX ambas disciplinas se acercaron mucho al concepto del infinito: esto no es nada sorprendente, concuerda muy bien con los ideales del período romántico y su atracción por los abismos. De hecho, ya que hemos mencionado a Wagner, podríamos hablar también de su amigo (y luego enemigo) Nietzsche, y de sus categorías estéticas de lo apolíneo y lo dionisíaco. Yo creo que si Nietzsche hubiera sabido matemáticas, también habría hablado de lo apolíneo y lo dionisíaco en matemáticas. Porque, ¿qué duda puede caber de que las ideas de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande son en el fondo conceptos dionisíacos? Y sin embargo su tratamiento matemático, a nivel formal, es siempre apolíneo: basta examinar, por ejemplo la definición de $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell$. Intuitivamente, esto quiere decir que cuando x se hace infinitamente pequeño la función $f(x)$ se hace ℓ. ¿Qué es algo infinitamente pequeño? Es un concepto tan abismal como lo infinitamente grande. Pero la definición precisa de este límite en lenguaje matemático moderno es: para todo número $\varepsilon > 0$ existe otro número $\delta > 0$ tal que si $0 < x < \delta$ entonces $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Aparentemente Apolo ha vencido a Dioniso al inspirar esta definición. Pero el infinito sigue agazapado ahí, en el hecho ineludible de que hay una cantidad infinita, incluso no numerable (es decir, que no se pueden poner en una lista infinita), de posibles $\varepsilon > 0$ cada vez más pequeños.

Pero bueno, creo que otra vez me estoy saliendo por la tangente. [*Risas*] Lo que quería subrayar es que cada disciplina se asomó al abismo del infinito por caminos diferentes, pero ambas acabaron estrellándose y de alguna manera tuvieron que refundarse. La música se acercó al infinito de una manera metafórica, por ejemplo a través de esa pulsión de la armonía de la música del siglo XIX hacia la disonancia (o el infinito de la serie armónica), y a las tensiones de estas disonancias que no se resuelven y se van acumulando más y más (como por ejemplo en *Tristán e Isolda*), creando un ímpetu que parece que nos lleva hacia el infinito. Esto acabó por agotar las posibilidades de evolución de la armonía clasico-romántica y provocó la crisis fundacional que antes he mencionado.

Por su parte la matemática, cuando por fin decidió aproximarse al infinito actual, lo hizo primero de una forma intuitiva y se encontró, no sólo con el abismo del infinito que andaba buscando, sino con el abismo de las paradojas, que amenazaban con destruir todo el edificio de las matemáticas cuidadosamente construido a lo largo de muchos siglos. Lo curioso es que en este punto se acaba el paralelismo que quería establecer entre la evolución de ambas disciplinas y comienza el *contraparalelismo*: la manera de salir de la crisis fundacional de las matemáticas fue aumentar el rigor de su lenguaje al máximo posible, convirtiéndolo en última instancia en un sistema formal con reglas lógicas y axiomas de formación y derivación de proposiciones, más unos axiomas más o menos intuitivos sobre conjuntos y operaciones sobre conjuntos, e ingeniándoselas para redefinir todos los conceptos anteriores en términos de conjuntos. La matemática ganó mucho en precisión y logró su objetivo de proscribir las paradojas, aunque a costa de hacer su lenguaje aún más inaccesible (y también pagando el precio de convertirse en un sistema formal que contiene la aritmética, precio que impone el teorema de incompletitud de Gödel: existen proposiciones matemáticas indecidibles, es decir, que no se pueden demostrar ni refutar; o incluso, visto de otra manera, existen proposiciones matemáticas verdaderas que no pueden demostrarse con el lenguaje matemático usual, sino sólo con un metalenguaje adecuado). Mientras que la música se encontró perdida sin el sustento de la teoría de la armonía que había venido utilizando con mucho éxito durante más de tres siglos y tuvo que reinventarse, desgajándose en diversas escuelas con diferentes objetivos y diferentes reglas.

En este sentido creo que puede decirse que mientras la música partió del rigor y en su busca del infinito se encontró con la libertad (y quizás también con el problema de no saber muy bien qué hacer con esa libertad), las matemáticas partieron de la finitud y la intuición, y en su busca del infinito acabaron encontrando el rigor que les hacía falta para poder seguir existiendo. [*Se queda pensativo y comienza a tararear el tema de* Los maestros cantores de Nuremberg.]

E.: Bueno, profesor Azagra, le agradecemos mucho el tiempo que nos ha dedicado, pero después de escuchar sus elucubraciones sobre el infinito, y ahora que se ha puesto a tararear a Wagner, como diría Woody Allen, temo que a alguno de nuestros oyentes le estén entrando ganas de invadir Polonia. Creo que es mejor concluir aquí la entrevista y cerrar el micrófono antes de que ocurra una desgracia.

D.A.: Totalmente de acuerdo. Muchas gracias por su entrevista.